

Całka powierzchniowa nieorientowana - ćwiczenia

Zadanie 1. Korzystając z Twierdzenia 1 z wykładu obliczyć podane całki.

- (a) $\iint_S (x + y + z) ds$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $z = -2x - 2y$ leżącą nad prostokątem D , gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 0, -2 \leq y \leq 0\}$;
- (b) $\iint_S (x + y + z) ds$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $x + y + z = 1$ leżącą w pierwszym oktancie układu współrzędnych;
- (c) $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} ds$, gdzie S jest powierzchnią boczną stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ograniczoną płaszczyzną $z = 3$;
- (d) $\iint_S z ds$, gdzie $S : z = \sqrt{2xy}, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$;
- (e) $\iint_S \sqrt{1 + y^2} ds$, gdzie $S : z = x\sqrt{3} + y^2, 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 4$.

Rozwiązanie przykładu (b):

Z założeń zadania płaszczyzna $x + y + z = 1$ jest określona dla $x \geq 0, y \geq 0$ i $z \geq 0$. Rzutem płata S na płaszczyznę xOy jest zbiór D , który możemy opisać jako zbiór punktów, spełniający warunki: $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x + 1$ (zbiór D traktujemy tutaj jako zbiór normalny względem osi Ox). Ponadto płat S jest dany wzorem $z = f(x, y) = 1 - x - y$, zaś funkcja $F(x, y, z) = x + y + z$. Zatem

$$f'_x = -1 \text{ i } f'_y = -1 \text{ oraz } F(x, y, z) = F(x, y, f(x, y)) = x + y + (1 - x - y) = 1.$$

Korzystając ze wzoru z Twierdzenia 1 mamy

$$\iint_S (x + y + z) ds = \iint_D 1 \cdot \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} \iint_D 1 dx dy = I$$

Można zauważyć, że zbiór D jest trójkątem ograniczonym prostą $y = -x + 1$ i osiami układu współrzędnych, zatem ostatnia całka definiuje pole tego trójkąta, stąd

$$I = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zadanie 2. Korzystając z Wniosku 1 z wykładu obliczyć pola podanych płatów.

- (a) $S : z = 2xy$, gdzie $x^2 + y^2 \leq 1$;
- (b) S jest częścią płaszczyzny $2x + 3y + z - 6 = 0$ wyciętą przez walec $x^2 + y^2 = 4$;
- (c) $S : z = \sqrt{x^2 + y^2}$, gdzie $x^2 + y^2 \leq 4$;
- (d) S jest częścią paraboloidy $z = x^2 + y^2$ odciętą przez płaszczyznę $z = 9$.

Rozwiązanie przykładu (d):

Płat S dany jest równaniem $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Z przecięcia paraboloidy i płaszczyzny otrzymujemy okrąg $x^2 + y^2 = 9$, zatem rzutem części płata S na płaszczyznę xOy jest koło o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 3$. Ponadto

$$f'_x = 2x \text{ i } f'_y = 2y.$$

Zatem, z wniosku 1 otrzymujemy

$$|S| = \iint_S 1 \, ds = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} \, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \, dxdy = I.$$

Korzystając ze współrzędnych biegunowych $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, gdzie $r \in [0, 3]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, mamy

$$x^2 + y^2 = (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 [(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2] = r^2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left[\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r \, d\varphi \right] dr = \int_0^3 \left[\sqrt{1 + 4r^2} \cdot r \int_0^{2\pi} d\varphi \right] dr \\ &= \int_0^3 \left[\sqrt{1 + 4r^2} \cdot r \cdot 2\pi \right] dr = 2\pi \int_0^3 \left[\sqrt{1 + 4r^2} \cdot r \right] dr. \end{aligned}$$

Podstawiając $1 + 4r^2 = t$ ($8r \, dr = dt$) oraz zmieniając granice całkowania, otrzymujemy

$$I = 2\pi \int_1^{37} \left[\sqrt{t} \cdot \frac{1}{8} \right] dt = \frac{\pi}{4} \int_1^{37} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot [t^{\frac{3}{2}}]_1^{37} = \frac{\pi}{6} (37^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Zadanie 3.

- (a) Oblicz całkę powierzchniową $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, gdzie S jest płatem powierzchni śrubowej: $\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases}$
gdzie $0 \leq u \leq 1$ oraz $0 \leq v \leq 1$.

- (b) Obliczyć pole płata S wyciętego z paraboloidy hiperbolicznej $x^2 - y^2 = 2z$ walcem $x^2 + y^2 = 2$. Płat ten ma równanie parametryczne $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = 2uv \end{cases}$ dla $u^2 + v^2 \leq 1$.

Rozwiązanie przykładu (a):

W tym przypadku musimy skorzystać z Twierdzenia 2 z wykładu. Mamy:

$$\begin{aligned} x'_u &= \cos v, & y'_u &= \sin v, & z'_u &= 0, \\ x'_v &= -u \sin v, & y'_v &= u \cos v, & z'_v &= 1, \end{aligned}$$

$$A = \begin{vmatrix} \sin v & u \sin v \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin v, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = -\cos v, \quad C = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u.$$

Ponadto

$$F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \sqrt{(u \cos v)^2 + (u \sin v)^2} = u$$

oraz

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{(\sin v)^2 + (-\cos v)^2 + u^2} = \sqrt{1 + u^2}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, ds &= \iint_D u \sqrt{1 + u^2} \, dudv = \int_0^1 \left[\int_0^1 u \sqrt{1 + 4r^2} \, dv \right] du = \int_0^1 [u \sqrt{1 + 4r^2} \cdot [v]_0^1] du \\
&= \int_0^1 [u \sqrt{1 + 4r^2}] du = I.
\end{aligned}$$

Podstawiając $1 + u^2 = t$ ($2u \, du = dt$) oraz zmieniając granice całkowania, otrzymujemy

$$I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot [t^{\frac{3}{2}}]_1^2 = \frac{1}{3} (2^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$