Pochodna kierunkowa, operatory różniczkowe - ćwiczenia

Przykład 1. Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = 3x^4 + xy + y^3$ w punkcie $P_0(1,2)$ w kierunku:
a) wektora $\overrightarrow{u}$ tworzącego z dodatnią półosią Ox kąt $\alpha = 150°$,
b) $\overrightarrow{v} = [-3,1]$.

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f i mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3 + y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 3y^2$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 14 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 13 \; .$$

a) Mamy $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ a zatem

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\sin\alpha = 14 \cdot \tfrac{-\sqrt{3}}{2} + 13 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{13-14\sqrt{3}}{2} \; .$$

b) Obliczamy kąt α: $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ i stąd $\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = 14 \cdot \tfrac{-3}{\sqrt{10}} + 13 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{10}} = \tfrac{-42+13}{\sqrt{10}} = \tfrac{-29}{\sqrt{10}} \; .$$

Przykład 2. W jakich punktach wektor $\overrightarrow{grad} f$, gdzie $f(x,y) = (x^2+y^2)^{3/2}$, ma długość 2?

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \tfrac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2} = 3x\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot \tfrac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2} = 3y\sqrt{x^2+y^2} \; ,$$

a więc

$$\left|\overrightarrow{grad} f\right| = \sqrt{\left(3x\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + \left(3y\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \sqrt{9x^2(x^2+y^2) + 9y^2(x^2+y^2)} = \sqrt{9(x^2+y^2)^2} = 3(x^2+y^2) \; .$$

Zatem

$$\left|\overrightarrow{grad} f\right| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+y^2) = \tfrac{2}{3} \; ,$$

co oznacza, że punkty o tej własności, że wektor $\overrightarrow{grad} f$ ma długość 2 leżą na okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt{2/3}$.

Przykład 3. Oblicz dywergencję funkcji wektorowej $F(x,y,z) = [y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2]$.

Mamy $P(x,y,z) = y^2+z^2$, $Q(x,y,z) = x^2+z^2$, $R(x,y,z) = x^2+y^2$ i

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \; , \; \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \; , \; \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \; ,$$

skąd $\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

Przykład 4. Oblicz laplasjan funkcji $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$.

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2+z^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{2(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \ .$$

Podobnie otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \ .$$

Stąd

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{2(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{2}{x^2+y^2+z^2} \ .$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sin^2 x + \cos(xy)$ w punkcie $P_0(\pi/4, 2)$ w kierunku wektora $\overrightarrow{v} = [2,-1]$.
2. Znaleźć punkt (x,y), w którym $\overrightarrow{grad} f = [1, -16/9]$, gdzie $f(x,y) = \ln(x + 1/y)$.
3. Oblicz dywergencję funkcji wektorowej $F(x,y,z) = [x^2yz, xy^2z, xyz^2]$.
4. Oblicz rotację funkcji wektorowej
   a) $F(x,y,z) = [x,y,z]$,
   b) $F(x,y,z) = [z,x,y]$,
   c) $F(x,y,z) = [y,z,x]$.
5. Oblicz wartość laplasjanu funkcji $f(x,y,z) = x^2e^{yz} + xy^3z^2$ w punkcie $P_0(2,-1,-1)$.