3. Ekstremum funkcji dwóch zmiennych

Rozpocznijmy od sformułowania pojęcia ekstremum dla funkcji dwóch zmiennych.

Definicja 1. *Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego otoczenia zachodzi nierówność $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$.*

Ponadto

Definicja 2. *Funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum właściwe, jeżeli istnieje sąsiedztwo tego punktu takie, że dla dowolnego (x, y) z tego sąsiedztwa zachodzi nierówność $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.*

Analogicznie definiujemy pojęcie maksimum lokalnego i maksimum lokalnego właściwego, przy czym zwroty nierówności są przeciwne.

Tak jak dla funkcji jednej zmiennej można podać warunek konieczny istnienia ekstremum. Mianowicie

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum i jest w tym punkcie różniczkowalna, to obie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w tym punkcie są równe zeru, tzn.*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 0 \end{cases}.$$

Aby stwierdzić, czy faktycznie w punkcie zerowania się pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego, czyli w **punktach stacjonarnych**, istnieje ekstremum należy sprawdzić warunek dostateczny, tzn.

Twierdzenie 2. *Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła i ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0)$,*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 0 \end{cases}$$

oraz wyznacznik pochodnych cząstkowych rzędu drugiego w punkcie P_0 jest dodatni, tzn.

$$W(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \end{vmatrix} > 0,$$

to funkcja w pukcie P_0 ma ekstremum i jest to minimum gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) > 0$ lub maksimum gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) < 0$.

Uwaga Gdy wyrażenie $W(P_0)$ jest ujemne, to funkcja $f(x, y)$ nie ma ekstremum w punkcie P_0. W przypadku, gdy $W(P_0) = 0$, badanie istnienia ekstremów przeprowadza się w oparciu o inne metody.

Przykład
Wyznaczyć wszystkie ekstrema funkcji
a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy$;

Rozwiązanie tego zadania rozpoczniemy od obliczenia pochodnych cząstkowych. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 9y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 9x.$$

Wyznaczymy teraz wszystkie pary (x, y) dla których warunek konieczny jest spełniony. Warunek

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{cases}$$

jest równoważny

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y &= 0 \\ 3y^2 - 9x &= 0 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania mamy $x^2 = 3y$, a stąd $y = \frac{x^2}{3}$. Podstawiając do równania drugiego mamy:

$$\frac{x^4}{9} - 3x = 0;$$

skąd otrzymujemy

$$x\left(\frac{x^3}{9} - 3\right) = 0.$$

A zatem mamy następujące rozwiązania $x = 0$ lub $x = 3$. Otrzymaliśmy dwa punkty w których może być ekstremum. Sa to punkty $A(0,0)$, $B(3,3)$. Do warunku dostatecznego potrzebujemy pochodnych rzędu drugiego. Mamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -9 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Dla punktu $A(0,0)$ mamy

$$W(A) = \begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix} = -81 < 0,$$

co oznacza, że w tym punkcie ekstremum nie występuje. W punkcie $B(3,3)$ mamy

$$W(B) = \begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} = 324 - 81 = 243 > 0,$$

czyli ekstremum w tym pukcie istnieje. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 18 > 0$, jest to minimum równe $f(3,3) = -27$.

b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$;

Obliczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y + 4x.$$

Warunek konieczny dla tej funkcji przyjmuje postać

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y & = & 0 \\ 4y^3 - 4y + 4x & = & 0 \end{cases}.$$

Dodając powyższe równania mamy $4x^3 + 4y^3 = 0$, skąd otrzymujemy $x = -y$. Podstawiając do układu równań otrzymany warunek otrzymujemy $4x^3 - 8x = 0$, a stąd mamy $x = 0$, $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$. Mamy zatem trzy punkty stacjonarne $A(0,0)$, $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $C(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Pochodne cząstkowe rzędu drugiego są równe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4.$$

Dla punktu $A(0,0)$ mamy

$$W(A) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

zatem Twierdzenie 2 nie rozstrzyga czy ekstremum istnieje. Dla punktu $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ mamy

$$W(B) = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 386 > 0,$$

zatem w punkcie tym jest ekstremum. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 20 > 0$, jest to minimum lokalne równe $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8$. Analogicznie, w punkcie C też jest minimum lokalne równe $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8$.

W przypadku funkcji dwóch zmiennych możemy także mówić o ekstremach globalnych, czyli wartości największej i najmniejszej na pewnym zbiorze.

Definicja 3. *Liczba m jest wartością najmniejszą funkcji f w zbiorze A, jeżeli w tym zbiorze istnieje punkt (x_*, y_*) taki, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in A$ mamy*

$$f(x, y) \geqslant f(x_*, y_*) \ .$$

Liczba M jest wartością największą funkcji f w zbiorze A, jeżeli w tym zbiorze istnieje punkt (x^*, y^*) taki, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in A$ mamy

$$f(x, y) \leqslant f(x^*, y^*) \ .$$

Aby wyznaczyć ekstrema globalne funkcji f w zbiorze A należy

1. wyznaczyć punkty stacjonarne f wewnątrz zbioru A;
2. wyznaczyć punkty na brzegu zbioru A, w których funkcja ma wartość największą i najmniejszą;
3. porównać wartości funkcji w otrzymanych punktach oraz na tej podstawie ustalić wartości największe i najmniejsze funkcji f w zbiorze A.

Przykład

Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji f w zbiorze D, gdzie

$$f(x, y) = x^2 - xy \qquad , \qquad D: \ x \in [0, 1]; y \in [0, \sqrt{x}].$$

Szukamy ekstremów wewnątrz zbioru. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x.$$

Jedyny punkt stacjonarny $P(0, 0)$ nie leży wewnątrz zbioru. Zatem funkcja może mieć jedynie ekstrema na brzegu zbioru D.

Na krzywej $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ rozważana funkcja jet równa $g_1(x) := f(x, \sqrt{x}) = x^2 - x\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Jest to funkcja jednej zmiennej, której ekstremum szukamy na przedziale $[0, 1]$. Mamy $g_1(0) = 0$, $g_1(1) = 0$. Ponadto $g_1'(x) = 2x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Z równania $g_1'(x) = 0$ otrzymujemy $x = 0$ lub $x = \frac{9}{16}$, a następnie $g_1(\frac{9}{16}) = -\frac{27}{256}$.

Na odcinku $x = 1$, $y \in [0, 1]$ mamy $g_2(y) := f(1, y) = 1 - y$. Jest to funkcja liniowa, więc wartość największą i najmniejszą osiąga na końcu przedziału i $g_2(0) = 1$ oraz $g_2(1) = 0$.

Na odcinku $y = 0$, $x \in [0, 1]$ mamy $g_3(x) := f(x, 0) = x^2$. Wartość największą i najmniejszą funkcja $g_3(x)$ osiąga na końcu przedziału i $g_3(0) = 0$ oraz $g_3(1) = 1$.

Zatem wartość największa funkcji f w zbiorze D wynosi 1 i jest osiągnięta w punkcie $(1, 0)$, zaś wartość najmniejsza funkcji f w zbiorze D jest równa $-\frac{27}{256}$ dla punktu $(\frac{9}{16}, \frac{3}{4})$.