Szeregi trygonometryczne - ćwiczenia

Zadanie 1. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = |x|$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Obliczmy najpierw współczynniki a_0 oraz a_n. Mamy

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(0\cdot x)\;dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\;dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\;dx + \int_0^{\pi} x\;dx\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{1}{2}x^2\right)_{-\pi}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[0-\left(-\frac{1}{2}(-\pi)^2\right)+\frac{1}{2}(\pi)^2 - 0\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{2}\pi^2\right] = \pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\;dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nx\;dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\;dx + \int_0^{\pi} x\cos nx\;dx\right].
\end{aligned}$$

Licząc całki przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\;dx &= \left\|\begin{array}{ll} f(x)=x & g'(x)=\cos nx\\ f'(x)=1 & g(x)=\frac{1}{n}\sin nx\end{array}\right\|\\
&= \left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\;dx\\
&= 0-\frac{1}{n}(-\pi)\sin(-n\pi) - \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{0}\\
&= \left[\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n^2}\left[\cos 0 - \cos(-n\pi)\right]\\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi.
\end{aligned}$$

Analogicznie liczymy całkę

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\cos nx\;dx &= \left[\frac{1}{n}x\sin nx\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{n}\pi\sin n\pi - 0 + \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\cos 0\\
&= \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\;dx + \int_0^{\pi} x\cos nx\;dx\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\cos n\pi + \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2}\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n^2}\cos n\pi - \frac{2}{n^2}\right] = \frac{2}{n^2\pi}\left[\cos n\pi - 1\right].
\end{aligned}$$

Ponieważ

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{dla } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

zatem

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & \text{dla } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkcja $f(x) = |x|$ jest funkcją parzystą, zatem z Twierdzenia 2 z wykładu współczynniki Eulera-Fouriera $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ostatecznie dla $x \in [-\pi, \pi]$ mamy

$$|x| \sim \frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{-4}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)x = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos 3x - \frac{4}{25\pi}\cos 5x - \frac{4}{49\pi}\cos 7x - \dots$$

Ponieważ funkcja f spełnia założenia kryterium Dirichleta, więc

$$|x| = \frac{1}{2}\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{-4}{(2n-1)^2\pi} \cos(2n-1)x\ ,\ \ x \in [-\pi, \pi]\ .$$

Zadanie 2. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję $f(x) = sgn(x)$ dla $x \in [-\pi, \pi]$.

Wiemy, że

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Funkcja $f(x) = sgn(x)$ jest funkcją nieparzystą, stąd na mocy Twierdzenia 2 z wykładu, współczynniki Eulera-Fouriera $a_n = 0$, dla $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\cdot\sin(nx)\ dx + \int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin(nx)\ dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)_{-\pi}^{0} + \left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos 0 - \frac{1}{n}\cos(-n\pi) - \frac{1}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\cos 0\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n} - \frac{2}{n}\cos(n\pi)\right] = \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right]. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & \text{dla } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{dla } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

zatem

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & \text{dla } n = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{dla } n = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ostatecznie dla $x \in [-\pi, \pi]$ mamy

$$sgn(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x = \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \frac{4}{7\pi}\sin 7x + \dots$$

Ponieważ funkcja f spełnia założenia 1 i 2 kryterium Dirichleta, więc

$$sgn(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x\ ,\ \ x \in (-\pi, \pi)\ .$$