Metody numeryczne - 2. rok Inżynierii i Analizy Danych

Laboratoria 3. Rozwiązywanie układów równań linowych. Metody iteracyjne.

Zadanie 1.
W MATLABIE napisz funkcję przyjmującą jako argumenty macierz współczynników układu równań A, wektor wyrazów wolnych b i liczbę całkowitą M, która wykonuje M kroków iteracyjnej metody Richardsona $x^{(n+1)} = (\mathbf{I}-A)x^{(n)}+b$, służącej do rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b$. Przyjmując $x_0 = b$ oraz

1) $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ wykonaj $M = 40$ kroków tej metody.

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{11}{18} \\ \frac{11}{18} \\ \frac{11}{18} \end{bmatrix}$ wykonaj $M = 100$ kroków tej metody.

Sprawdź, czy macierze te spełniają warunek

$$||I - Q^{-1}A|| < 1$$

Stosując funkcje i operatory MATLABA wyznacz dokładne rozwiązania.

Zadanie 2.
W MATLABIE napisz funkcję przyjmującą jako argumenty macierz współczynników układu równań A, wektor wyrazów wolnych b i liczbę całkowitą M, która wykonuje M kroków iteracyjnej metody Gaussa-Seidela, a następnie zastosuj ją dla:

1) $x^{(0)} = [0;\ 0;\ 0]$ i

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2) $x^{(0)} = [0;\ 0;\ 0]$ i

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3) $x^{(0)} = [0;\ 0;\ 0]$ i

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4) $x^{(0)} = [0,33116;\ 0,7]$ i

$$\begin{cases} 0,96326x + 0,81321y = 0,88824 \\ 0,81321x + 0,68654y = 0,74988 \end{cases}$$

i $M = 30$. Porównaj wynik z wynikiem dokładnym uzyskanym przy zastosowaniu funkcji i operatorów MATLABA.

Zadanie 3.
W MATLABIE napisz funkcję przyjmującą jako argumenty macierz współczynników układu równań A, wektor wyrazów wolnych b i liczbę całkowitą M, która wykonuje M kroków iteracyjnej metody Jacobiego i zastosuj ją dla $x^{(0)} = [0;\ 0;\ 0;\ 0]$ i

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

i $M = 10$. Porównaj wynik z wynikiem dokładnym uzyskanym przy zastosowaniu funkcji i operatorów MATLABA.

Zadanie 4.
W MATLABIE napisz funkcję przyjmującą jako argumenty macierz współczynników układu równań A, wektor wyrazów wolnych b i liczbę całkowitą M, która wykonuje M kroków metody najszybszego spadku i zastosuj ją do $x^{(0)} = [0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0]$ $n = 6$ i

$$A = (a_{ij}) = \frac{1}{i+j+1}, \qquad b_i = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

oraz $M = 30$.

Zadanie 5.
Stosując napisane w poprzednich zadaniach funkcje zastosuj metody: Jacobiego, Gaussa-Seidela i najszybszego spadku do

1) $x^{(0)} = [0;\ 0;\ 0]$ i

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) $x^{(0)} = [0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0]$ i

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{bmatrix}$$

dla $M = 10$, $M = 20$ i $M = 30$. Porównaj uzyskane wyniki z rozwiązaniem dokładnym i między poszczególnymi metodami.

Zadanie 6.
Zmodyfikuj napisaną wcześniej funkcję do metody iteracyjnej Gaussa-Seidela, tak aby przyjmowała ona dodatkowy parametr `Eps` i działała w ten sposób, że wykonuje ona M kroków metody Gaussa-Seidela, albo działa dopóki różnica pomiędzy kolejnymi przybliżeniami (w sensie długości wektora $|x^{(k)} - x^{(k-1)}|$) będzie mniejsza niż `Eps`. Metoda kończy działanie jeśli zajdzie którykolwiek z powyższych warunków.