1 Całka potrójna

1.1 Całka potrójna po prostopadłościanie

Twierdzenie 1 *Jeśli f jest ciągła w prostopadłościanie domkniętym $P = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$, to*

$$\iiint_P f(x,y,z)\ dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} \left[\int_{b_1}^{b_2} \left[\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\ dz \right] dy \right] dx\ .$$

Wzór pozostaje prawdziwy przy dowolnej zmianie kolejności całek iterowanych.

Przykład.
Oblicz $\iiint_P (x^2 + yz + xz^3)\ dxdydz \quad , \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant 2\ ,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

$$\begin{aligned}
\iiint_P (x^2 + yz + xz^3)\ dxdydz &= \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (x^2 + yz + xz^3)\ dz \right] dy \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 \left[x^2 z + \tfrac{1}{2} y z^2 + \tfrac{1}{4} x z^4 \right]_0^1 dy \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + \tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{4} x) dy \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 y + \tfrac{1}{4} y^2 + \tfrac{1}{4} x y \right]_{-1}^1 dx \\
&= \int_0^2 \left[(x^2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} x) - (-x^2 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} x) \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[2x^2 + \tfrac{1}{2} x \right] dx \\
&= \left[\tfrac{2}{3} x^3 + \tfrac{1}{4} x^2 \right]_0^2 = \tfrac{16}{3} + 4 = \tfrac{28}{3}
\end{aligned}$$

Definicja 1 *Zbiór G nazywamy normalnym względem płaszczyzny xOy jeśli można opisać go przy pomocy nierówności*

$$G : \begin{cases} h_1(x,y) \leqslant z \leqslant h_2(x,y) \\ (x,y) \in D\ , \end{cases} \tag{1}$$

gdzie D jest zbiorem regularnym na płaszczyźnie xOy.

Z powyższej definicji wynika, że G jest bryłą, której rzutem na płaszczyznę xOy jest D, a jej górnym ograniczeniem jest powierzchnia $z = h_2(x,y)$, zaś dolnym $z = h_1(x,y)$. Inaczej mówiąc, G jest walcem o przekroju D ograniczonym z góry i z dołu odpowiednio przez $z = h_2(x,y)$ i $z = h_1(x,y)$.

Przykład.
Niech $G = \{(x,y) \in D\ ,\ \sqrt{4 - x - y} \leqslant z \leqslant \sqrt{8 - y}\ \}$, D jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(-2,-2)$, $(2,-2)$.

Zbiór G jest normalny względem płaszczyzny xOy gdyż jest ograniczony z góry i z dołu odpowiednio przez $z = \sqrt{8 - y}$ i $z = \sqrt{4 - x - y}$. Przekrój walca jest trójkątem opisanym powyżej.

Twierdzenie 2 *Jeśli f jest ciągła w zbiorze G normalnym względem płaszczyzny xOy postaci (1), to*

$$\iiint_G f(x,y,z)\ dxdydz = \iint_D \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz \right] dxdy\ .$$

Przykład.
Oblicz $\iiint_G 4z\ dxdydz \quad , \quad G = \{(x,y) \in D\ ,\ \sqrt{4-x-y} \leqslant z \leqslant \sqrt{8-y}\ \}$, D jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(-2,-2)$, $(2,-2)$.

$$\begin{aligned}
\iiint_G 4z\ dxdydz &= \iint_D \left[\int_{\sqrt{4-x-y}}^{\sqrt{8-y}} 4z\ dz\right] dxdy \\
&= \iint_D \left[2z^2\right]_{\sqrt{4-x-y}}^{\sqrt{8-y}} dxdy \\
&= \iint_D \left[2(8-y) - 2(4-x-y)\right] dxdy \\
&= \iint_D (2x+8) dxdy\ .
\end{aligned}$$

Zbiór D jest ograniczony przez proste przechodzące przez ww. punkty, tj. przez proste

$$y = x\ ,\ y = -x\ ,\ y = -2\ .$$

Zatem D jest zbiorem normalnym względem osi Ox i można opisać w następujący sposób

$$D : \begin{cases} -2 \leqslant y \leqslant 0 \\ y \leqslant x \leqslant -y\ , \end{cases}$$

a więc

$$\begin{aligned}
\iint_D (2x+8) dxdy &= \int_{-2}^{0} \left(\int_{y}^{-y} (2x+8) dx\right) dy = \int_{-2}^{0} \left(x^2+8x\right)_{y}^{-y} dy \\
&= \int_{-2}^{0} \left((y^2-8y) - (y^2+8y)\right) dy = \int_{-2}^{0} (-16y)\, dy = -8y^2|_{-2}^{0} = 32\ .
\end{aligned}$$

Twierdzenie 3 *Objętość bryły G, która jest zbiorem normalnym względem płaszczyzny xOy wynosi*

$$|G| = \iiint_G 1\ dxdydz\ .$$

Symbol G rozumiemy jako miarę trójwymiarową zbioru G, czyli objętość G.

Przykład.
Oblicz objętość bryły G ograniczonej powierzchniami $y = x$, $x = 0$, $y = 2$, $x + z = 0$ i $x + y + z = 3$.

Zbiór G jest ograniczony z dołu i z góry przez powierzchnie $x + z = 0$ i $x + y + z = 3$ (tylko w tych równaniach pojawia się zmienna z). Są to płaszczyzny $z = -x$ stanowiąca dolne ograniczenie zbioru G i $z = 3 - x - y$ stanowiąca górne ograniczenie zbioru G. Zbiór G ma ściany boczne w postaci trzech płaszczyzn $y = x$, $x = 0$, $y = 2$. Ich rzut na xOy jet trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,2)$ i $(2,2)$. Zatem

$$G : \begin{cases} -x \leqslant z \leqslant 3 - x - y \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

i

$$\begin{aligned}
|G| = \iiint_G 1\ dxdydz &= \iint_D \left[\int_{-x}^{3-x-y} 1\ dz\right] dxdy \\
&= \iint_D [z]_{-x}^{3-x-y}\ dxdy \\
&= \iint_D \left[(3-x-y) - (-x)\right] dxdy \\
&= \iint_D (3-y) dxdy\ .
\end{aligned}$$

Ponieważ mamy

$$D : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x \leqslant y \leqslant 2 \end{cases},$$

to

$$\begin{aligned} |G| &= \iint_D (3-y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_x^2 (3-y)dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(3y - \tfrac{1}{2}y^2 \right)_x^2 dx \\ &= \int_0^2 \left((6-2) - (3x - \tfrac{1}{2}x^2) \right) dx \\ &= \left(4x - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 \right)_0^2 = 8 - 6 + \tfrac{4}{3} = \tfrac{10}{3} \ . \end{aligned}$$