Zadanie 1. Obliczyć pole zbioru ograniczonego krzywymi

a) $4y = x^2 - 4x,\ \ x - y - 3 = 0,$

b) $y^2 = 1 - x,\ \ y = \dfrac{1}{2}x + 1,$

c) $y^2 = 4x, x + y = 3, y = 0,\ (y \geqslant 0),$

d) $y = e^x, y = \ln x, x + y = 1, x = 2,$

e) $y = \dfrac{1}{x},\ \ x = 1,\ \ \ x = e,\ \ y = 0,$

f) $y = 3x - x^2, y = x,$

g) $y = 6 - x, y = \sqrt{x}, x = 6,$

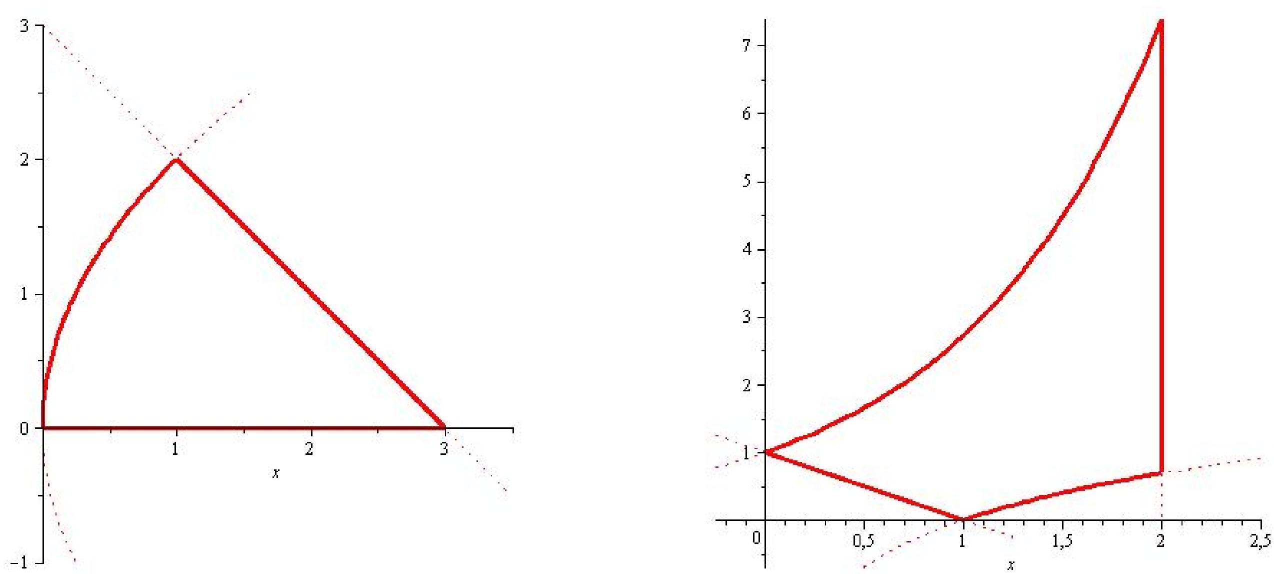
h) $y = 6 - x, y = \sqrt{x}, y = 0.$

Rozwiązanie przykładu (c)

Wyznaczymy punkty wspólne krzywych ograniczających zbiór D. Proste $y = 0$ i $x + y = 3$ przecinają się w punkcie $(3, 0)$. Prosta $y = 0$ i parabola $y^2 = 4x$ przecinają się w punkcie $(0, 0)$. Aby wyznaczyć punkty wspólne prostej $x + y = 3$ i paraboli $y^2 = 4x$ rozwiążemy układ równań

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = 3 - y \ , \end{cases}$$

Stąd $y^2 + 4y - 12 = 0$, a zatem $y = -6$ lub $y = 2$. Punkty wspólne są więc postaci $(1, 2)$ i $(9, -6)$.



Rysunek 1: Zbiory D z przykładów 1.c i 1.d.

Zbiór D możemy przedstawić w postaci

$$D = \left\{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant 2\ ,\ \tfrac{y^2}{4} \leqslant x \leqslant 3 - y\right\}\ .$$

Oznacza to, że zbiór D jest zbiorem normalnym względem osi Oy. Warto przy okazji zwrócić uwagę na fakt, że nie jest on zbiorem normalnym względem osi Ox. Zbiór D przedstawiony jest na rysunku powyżej. Mamy zatem

$$|D| = \iint_D dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dx \right) dy = \int_0^2 \left(3 - y - \frac{y^2}{4} \right) dy = \left[3y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3 \right]_0^2 = 6 - 2 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

Rozwiązanie przykładu (d)

Zbiór D przedstawiony jest na rysunku powyżej. Widać, że nie jest on zbiorem normalnym względem żadnej osi układu. Możemy jednak przedstawić D jako sumę dwóch zbiorów normalnych D_1 i D_2 takich, że

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - x \leqslant y \leqslant e^x \end{cases}, \qquad D_2 : \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \ln x \leqslant y \leqslant e^x \end{cases}.$$

Zatem pole obszaru D obliczymy w następujący sposób:

$$\begin{aligned} |D| &= \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{e^x} dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\ln x}^{e^x} dy \right) dx = \int_0^1 (e^x - 1 + x)\, dx \\ &+ \int_1^2 (e^x - \ln x)\, dx = \left[e^x - x + \tfrac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + [e^x]_1^2 - \int_1^2 \ln x dx = e - 1 + \tfrac{1}{2} - 1 + e^2 - e \\ &- \left([x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \cdot \tfrac{1}{x} dx \right) = e^2 - \tfrac{3}{2} - 2\ln 2 + x|_1^2 = e^2 - 2\ln 2 - \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Oblicz objętość bryły ograniczonej

(a) paraboloidą $16 - x^2 - y^2 = 4z$ i płaszczyznami $x + y + z = 4,\ x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,$

(b) powierzchniami $z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ y = 3x,\ y = 3,\ x = 0,$

(c) powierzchniami $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ x + y + z = 3.$

Rozwiązanie przykładu (a)

Zbiór G jest walcem o przekroju D ściętym powierzchniami $16 - x^2 - y^2 = 4z$ i $x + y + z = 4$. Pozostałe płaszczyzny tworzą ściany boczne tego walca. Mamy więc

$$D = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 4\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 4 - x\}$$

oraz

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D\ ,\ -x - y + 4 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{4}(16 - x^2 - y^2)\}\ .$$

Stąd

$$\begin{aligned} |G| &= \iint_D \left[\tfrac{1}{4}(16 - x^2 - y^2) - (-x - y + 4) \right] dxdy \\ &= \iint_D (x + y - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}y^2) dxdy\ . \end{aligned}$$

Zbiór D jest zbiorem normalnym względem osi Ox więc

$$\begin{aligned}
|G| &= \iint_D (x + y - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}y^2)dxdy \\
&= \int_0^4 \left(\int_0^{4-x} (x + y - \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}y^2)dy \right) dx \\
&= \int_0^4 \left(xy + \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{x^2 y}{4} - \tfrac{y^3}{12} \right)_0^{4-x} dx \\
&= \int_0^4 \left(\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{11}{6}x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{8}{3} \right) dx \\
&= \left[\tfrac{x^4}{12} - \tfrac{11}{18}x^3 + \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{8}{3}x \right]_0^4 = \tfrac{32}{9} \ .
\end{aligned}$$