wtedy podstawiamy wartości początkowe zarówno do całki ogólnej, jak i jej pochodnej:

$$y'(t) = e^{-2t}[(-2c_1 + c_2)\cos t + (-c_1 - 2c_2)\sin t].$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} c_1 & = & 0 \\ -2c_1 + c_2 & = & -2 \end{cases},$$

który następnie rozwiązujemy

$$\begin{cases} c_1 & = & 0 \\ c_2 & = & -2 \end{cases}.$$

Całka szczególna dana jest wzorem

$$y(t) = -2e^{-2t}\sin t.$$

Wróćmy teraz do równania liniowego niejednorodnego. W poszukiwaniu rozwiązania ogólnego równania niejednorodnego pomocne jest twierdzenie:
Twierdzenie
Niech $\varphi(t)$ będzie dowolnym rozwiązaniem równania liniowego niejednorodnego (9) oraz niech $y_1(t)$, $y_2(t)$ będzie układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego (10). Wtedy dla każdego rozwiązania $y(t)$ równania niejednorodnego istnieją stałe c_1 i c_2 takie, że $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \varphi(t)$. Innymi słowy, znając dowolne rozwiązanie równania niejednorodnego oraz układ fundamentalny równania jednorodnego (rozwiązanie ogólne) możemy podać wszystkie rozwiązania równania niejednorodnego. Poznamy dwie metody poszukiwania rozwiązań równania niejednorodnego: metodę uzmienniania stałych oraz metodę przewidywań.

W metodzie uzmienniania stałych wykorzystuje się rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, w którym uzmiennia się stałe c_1 oraz c_2: $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$. Ponadto, tak uzmiennione stałe muszą spełniać warunek

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(t) \end{bmatrix}, \tag{38}$$

co oznacza, że funkcje $c_1(t)$ i $c_2(t)$ tworzą parę rozwiązań układu równań:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1(t)c_1'(t) + y_2(t)c_2'(t) & = & 0 \\ y_1'(t)c_1'(t) + y_2'(t)c_2'(t) & = & q(t). \end{array} \right. . \tag{39}$$

Przykład
Rozwiązać równanie: $y'' + 2y' = e^{-2t}$.

Spróbujmy powyższe równanie rozwiązać za pomocą metody przewidywań, która polega na odgadywaniu postaci ogólnej całki równania niejednorodnego. Oczywiście całka ogólna równania jednorodnego nie zmienia się. Przyjrzyjmy się stronie prawej równania $q(t) = e^{-2t}$. Możemy spróbować odgadnąć całkę szczególną równania niejednorodnego jako $\varphi(t) = ae^{-2t}$. Różniczkując dwukrotnie stronami dostajemy:

$$\varphi'(t) = -2ae^{-2t}, \quad \varphi''(t) = 4ae^{-2t}.$$

Wstawiając powyższe zależności do równania wyjściowego otrzymujemy

$$4ae^{-2t} - 4ae^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow 0 = e^{-2t},$$

co jest sprzecznością wobec własności funkcji wykładniczej e^{-2t} (w ogólności wobec równości dwóch funkcji zmiennej t). Oznacza to, że nasze przewidywanie było błędne. Powodem jest tutaj jedno z rozwiązań równania jednorodnego, które jest równe funkcji $q(t) = e^{-2t}$. W takim przypadku modyfikujemy przewidywanie do postaci następującej: $\varphi(t) = ate^{-2t}$. Podobnie jak wcześniej różniczkujemy dwukrotnie stronami i wstawiamy do równania niejednorodnego:

$$\varphi'(t) = ae^{-2t} - 2ate^{-2t}, \quad \varphi''(t) = -4ae^{-2t} + 4ate^{-2t},$$

$$-4ae^{-2t} + 4ate^{-2t} + 2ae^{-2t} - 4ate^{-2t} = e^{-2t},$$

$$-2ae^{-2t} = e^{-2t} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Zatem całka szczególna dana jest wzorem $\varphi(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t}$, a całka ogólna równania niejednorodnego jest równa $y(t) = c_1 + c_2e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t}$.

Postać poprawnego przewidywania całki szczególnej równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach w zależności od prawej strony obrazuje poniższa tabela.

Podany sposób rozwiązywania równań różniczkowych liniowych niejednorodnych rzędu drugiego można uogólnić na równania wyższych rzędów.

Prawa strona równania $q(t)$	Równanie charakterystyczne	Postać przewidywanej całki szczególnej
Wielomian $P_n(t)$ stopnia n	Liczba 0 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego	$M_n(t)$
	Liczba 0 jest m-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego	$t^m M_n(t)$
$P_n(t)e^{kt}, \quad k \in \mathbb{R}$	Liczba k nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego	$M_n(t)e^{kt}$
	Liczba k jest m-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego	$t^m M_n(t)e^{kt}$
$P_n(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t$	Liczba $\pm\beta i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego	$M_n(t)\cos\beta t + N_n(t)\sin\beta t$
	Liczba $\pm\beta i$ jest m-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego	$t^m M_n(t)\cos\beta t + t^m N_n(t)\sin\beta t$
$P_n(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + Q_n(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$	Liczba $\alpha \pm \beta i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego	$M_n(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + N_n(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$
	Liczba $\alpha \pm \beta i$ jest m-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego	$t^m M_n(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + t^m N_n(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$

Tablica 1: Tabela przewidywań rozwiązań szczególnych równań liniowych rzędu n o stałych współczynnikach.