Pochodne cząstkowe - ćwiczenia

Uwaga: Obliczając pochodne cząstkowe względem jednej zmiennej, pozostałe zmienne traktujemy jako stałe. Ponadto, stosujemy reguły różniczkowania znane z analizy funkcji jednej zmiennej.

Przykład 1

Obliczyć pochodne cząstkowe I rzędu funkcji: $f(x,y) = 2x^2 + 3y^4 - 4xy^3 - 2e^{xy}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x - 4y^3 - 2ye^{xy}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 12y^3 - 12xy^2 - 2xe^{xy}$

Przykład 2

Obliczyć pochodne cząstkowe I rzędu funkcji:

$f(x,y,z) = 3x^3yz^2 - \dfrac{z^2}{x} + (y^2 - x^2)^2$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 9x^2yz^2 - z^2(-\dfrac{1}{x^2}) + 2(y^2 - x^2)(-2x) = 9x^2yz^2 + \dfrac{z^2}{x^2} - 4x(y^2 - x^2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^3z^2 + 2(y^2 - x^2)(2y) = 3x^3z^2 + 4y(y^2 - x^2)$

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = 6x^3yz - 2z\dfrac{1}{x} = 6x^3yz - \dfrac{2z}{x}$

Przykład 3

Obliczyć pochodne cząstkowe II rzędu funkcji: $f(x,y) = \ln(x - y) + 2xy$.

Zaczynamy od pochodnych cząstkowych I rzędu :

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x-y} \cdot 1 + 2y = \dfrac{1}{x-y} + 2y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x-y} \cdot (-1) + 2x = -\dfrac{1}{x-y} + 2x$

Obliczamy pochodne cząstkowe II rzędu czyste:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{x-y} + 2y\right) = -\dfrac{1}{(x-y)^2} \cdot 1 = -\dfrac{1}{(x-y)^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{1}{x-y} + 2x\right) = -(-\dfrac{1}{(x-y)^2} \cdot (-1)) = -\dfrac{1}{(x-y)^2}$

Następnie obliczamy pochodne cząstkowe II rzędu mieszane i sprawdzamy ich równość :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{x-y} + 2x\right) = -(-\dfrac{1}{(x-y)^2} \cdot 1) + 2 = \dfrac{1}{(x-y)^2} + 2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{x-y} + 2y\right) = -\dfrac{1}{(x-y)^2} \cdot (-1) + 2 = \dfrac{1}{(x-y)^2} + 2$

Przykład 4

Obliczyć pochodne cząstkowe II rzędu funkcji:

$f(x,y,z) = xy^3z^2 - e^{2xy}$.

Zaczynamy od pochodnych cząstkowych I rzędu :

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3z^2 - e^{2xy} \cdot 2y = y^3z^2 - 2ye^{2xy}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2z^2 - e^{2xy} \cdot 2x = 3xy^2z^2 - 2xe^{2xy}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2xy^3z$

Obliczamy pochodne cząstkowe II rzędu czyste :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3z^2 - 2ye^{2xy}\right) = 0 - 2y \cdot e^{2xy} \cdot 2y = 4y^2e^{2xy}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3xy^2z^2 - 2xe^{2xy}\right) = 6xyz^2 - 2x \cdot e^{2xy} \cdot 2x = 6xyz^2 - 4x^2e^{2xy}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(2xy^3z\right) = 2xy^3$

Następnie obliczamy pochodne cząstkowe II rzędu mieszane i sprawdzamy ich równość parami :

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3xy^2z^2 - 2xe^{2xy}\right) = 3y^2z^2 - (2e^{2xy} + 2xe^{2xy}2y) = 3y^2z^2 - 2e^{2xy} - 4xye^{2xy}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3z^2 - 2ye^{2xy}\right) = 3y^2z^2 - (2e^{2xy} + 2ye^{2xy}2x) = 3y^2z^2 - 2e^{2xy} - 4xye^{2xy}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^3z\right) = 2y^3z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(y^3z^2 - 2ye^{2xy}\right) = 2y^3z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^3z\right) = 6xy^2z$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(3xy^2z^2 - 2xe^{2xy}\right) = 6xy^2z$

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe I rzędu funkcji:

   (a) $f(x, y) = 2x^3y^4 - 3x + 2y - 1$

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2\sqrt{xy}$

   (c) $f(x, y) = x(x - y)^5$

   (d) $f(x, y) = 2 - ye^{xy^2}$

   (e) $f(x, y) = \frac{y}{x}$

   (f) $f(x, y) = \frac{x-2}{1-y}$

   (g) $f(x, y) = \ln\left(x^2 - y^2\right)$

   (h) $f(x, y) = xy\ln\left(x^2 - y^2\right)$

   (i) $f(x, y) = \frac{2y}{x} - \arcsin y$

   (j) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (k) $f(x, y) = xy\cos(xy)$

   (l) $f(x, y) = (x + 2)^4(y - 3)^2$

2. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe II rzędu funkcji:

   (a) $f(x, y) = x^2y^3 - 4xy + 2y - 1$

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - \sin xy$

   (c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

   (d) $f(x, y) = e^{xy}$

   (e) $f(x, y) = \frac{3-3x}{y+2}$

   (f) $f(x, y) = (x - 5)^2(y + 7)^3$

3. Niech $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Wykazać, że dla każdego $(x, y) \neq (0, 0)$ zachodzi równość:
   $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2.$

4. Niech $f(x, y) = 1 + \dfrac{x-y}{y-z}$. Wykazać, że dla każdego (x, y, z), gdzie $y \neq z$ zachodzi równość: $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} = 1$.