ZADANIE 1.108. Zbadać ekstrema funkcji $f(x, y)=3x^3+3x^2y-y^3-15x$.

Rozwiązanie. Obliczmy pochodne

$$f'_x(x, y)=9x^2+6xy-15, \quad f'_y(x, y)=3x^2-3y^2,$$
$$f''_{xx}=18x+6y, \quad f''_{yy}=-6y, \quad f''_{xy}=6x.$$

Rozwiązujemy układ równań $f'_x=0$, $f'_y=0$, czyli po uproszczeniu układ

$$3x^2+2xy-5=0, \quad x^2-y^2=0.$$

Z drugiego równania wynika, że $y=x$ lub $y=-x$.

Podstawiając $y=x$ do pierwszego równania otrzymujemy $5x^2-5=0$, skąd $x=1$ lub $x=-1$, a następnie $y=1$ lub $y=-1$. Mamy dwa punkty $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$, w których może wystąpić ekstremum.

Podstawiamy teraz $y=-x$ do pierwszego równania, otrzymujemy $x^2=5$, stąd $x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$, a następnie $y=-\sqrt{5}$ lub $y=\sqrt{5}$. Mamy więc dwa następne punkty $C(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, $D(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$. Wypiszmy teraz wartości drugich pochodnych w punktach A, B, C, D:

	A	B	C	D
f''_{xx}	24	-24	$12\sqrt{5}$	$-12\sqrt{5}$
f''_{xy}	6	-6	$6\sqrt{5}$	$-6\sqrt{5}$
f''_{yy}	-6	$+6$	$6\sqrt{5}$	$-6\sqrt{5}$

Widzimy, że dla dwóch pierwszych układów rozwiązań f''_{xx} i f''_{yy} mają różne znaki, a więc warunek 3° istnienia ekstremum nie jest spełniony. Natomiast dla układu trzeciego i czwartego zachodzi $\delta<0$, czyli funkcja ma ekstremum, przy czym dla układu trzeciego jest to minimum, a dla układu czwartego jest to maksimum. A więc funkcja $f(x, y)=3x^3+3x^2y-y^3-15x$ ma minimum w punkcie $C(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, a maksimum w punkcie $D(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

Jak łatwo obliczyć,

$$f_{\min}=-10\sqrt{5}, \quad f_{\max}=10\sqrt{5}.$$

Natomiast wartości $f(1, 1)=-10$ i $f(-1, -1)=10$ nie są ekstremami.

ZADANIE 1.109. Wyznaczyć współrzędne punktów leżących na paraboli $y^2=6x$, których odległość od punktu $A(3, 12)$ jest ekstremalna.

Rozwiązanie. Kwadrat odległości punktu danego $A(3, 12)$ od punktu bieżącego krzywej $y^2=6x$ oznaczmy przez z; wówczas

$$z=(x-3)^2+(y-12)^2.$$

Wyznaczamy pochodną

$$\frac{dz}{dx}=2(x-3)+2(y-12)\frac{dy}{dx}.$$

Pochodną $\frac{dy}{dx}$ otrzymujemy ze związku $y^2=6x$; mamy $2y\frac{dy}{dx}=6$, a więc $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{y}$. St

$$\frac{dz}{dx}=2(x-3)+2(y-12)\frac{3}{y}.$$

Pochodną dz/dx przyrównujemy do zera:

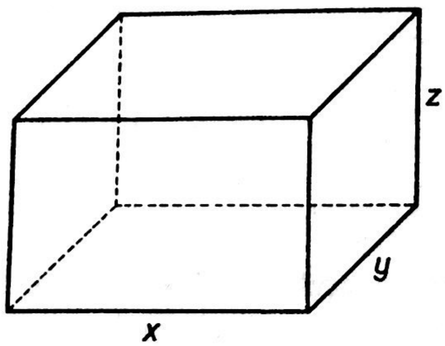
$$2(x-3)+2(y-12)\frac{3}{y}=0, \quad \text{skąd} \quad xy=36.$$

Rozwiązujemy obecnie układ równań

$$xy=36, \quad y^2=6x,$$

skąd mamy $x=6$, $y=6$. Z łatwego szkicu wnioskujemy, że jest to minimum.

Zadanie 1.110. Określić wymiary otwartego zbiornika prostopadłościennego o ob tości 32 cm³ tak, żeby jego pole powierzchni było minimalne.



Rys. 1.17

Rozwiązanie. Objętość wynosi (rys. 1.17) $xyz=32$. Pole powierzchni zbiorni otwartego równe $S=2yz+2xz+xy$, zatem

$$S=\frac{64}{x}+\frac{64}{y}+xy.$$

Obliczamy pochodne

$$\frac{\partial S}{\partial x}=-\frac{64}{x^2}+y, \quad \frac{\partial S}{\partial y}=-\frac{64}{y^2}+x,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{128}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}=1, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=\frac{128}{y^3}.$$

Rozwiązujemy układ równań $\frac{\partial S}{\partial x}=0$, $\frac{\partial S}{\partial y}=0$, czyli po uproszczeniu

$$64-x^2y=0, \; 64-y^2x=0, \quad \text{skąd} \quad x=4, \; y=4.$$

Wartości drugich pochodnych w tym punkcie wynoszą

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}=1, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=2,$$

zatem

$$\delta=\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=1-4=-3<0$$

Minimalne pole powierzchni zbiornika mamy przy następujących jego wymiarach: $x=4$, $y=4$, $z=2$.

Zadania

Zbadać ekstrema funkcji $z=f(x,y)$ (zad. 1.111 - 1.139):

1.111. $f(x,y)=2x^2+3xy+y^2-2x-y+1$.

1.112. $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

1.113. $f(x,y)=x^2-xy+2y^2-x+4y-5$.

1.114. $f(x,y)=x^3+y^3-3axy$.

1.115. $f(x,y)=x^3+3x^2y-6xy-3y^2-15x-15y$.

1.116. $f(x,y)=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$.

1.117. $f(x,y)=x^2+y^2+xy-6x-4y+5$.

1.118. $f(x,y)=x^2-6xy+y^3+3x+6y$.

1.119. $f(x,y)=4xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

1.120. $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$.

1.121. $f(x,y)=x^3+y^2-6xy-48x$.

1.122. $f(x,y)=(x+y)^2-(x+5y+xy)$.

1.123. $f(x,y)=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

1.124. $f(x,y)=xy^2(a-x-y)^3$.

1.125. $f(x,y)=(6-x-y)x^2y^3$.

1.126. $f(x,y)=\sin x+\sin y+\sin(x+y)$.

1.127. $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$.

1.128. $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(a-x-y)$.

1.129. $f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y)$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\pi$.

1.130. $f(x,y)=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

1.131. $f(x,y)=x^2+xy+y^2-4\ln|x|-10\ln|y|$.

$$=\ln xy+\frac{1}{x}h+\frac{1}{y}k-\frac{1}{2x^2}h^2-\frac{1}{2y^2}k^2+\frac{1}{3x^3}h^3+\frac{1}{3y^3}k^3-\frac{1}{4x^4}h^4-\frac{1}{4y^4}k^4+\ldots$$

1.111. Funkcja nie ma ekstremów.

1.112. W punktach $A(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ jest $z_{min}=-8$, w punkcie $(0,0)$ nie istnieje ekstremum.

1.113. W punkcie $(0, -1)$ jest $z_{min}=-7$.

1.114. W punkcie (a, a) jest $z_{extr}=-a^3$, przy czym przy $a>0$ zachodzi minimum, a przy $a<0$ jest maksimum.

1.115. Pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ jednocześnie równe zeru w punktach $A(0, -\frac{5}{2})$, $B(-1, -1)$ i $C(3, -1)$, ale ekstremum funkcji jest tylko w punkcie A, mianowicie $z_{max}=\frac{75}{4}$.

1.116. W punkcie $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ jest $z_{min}=-\frac{4}{3}$.

1.117. $z_{min}=-\frac{11}{3}$ w punkcie $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$.

1.118. $z_{min}=-27\frac{1}{4}$ w punkcie $(\frac{27}{2}, 5)$.

1.119. $z_{min}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ w punkcie $(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2})$.

1.120. $z_{min}=-1$ w punkcie $(1, 0)$.

1.121. $z_{min}=-448$ w punkcie $(8, 24)$.

1.122. $z_{min}=-7$ w punkcie $(-1, 3)$.

1.123. $z_{max}=1$ w punkcie $(0, 0)$.

1.124. $z_{max}=\frac{a^6}{432}$ w punkcie $(\frac{1}{6}a, \frac{1}{3}a)$.

1.125. $z_{min}=108$ w punkcie $(2, 3)$.

1.126. $z_{max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ w punkcie $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$.

1.127. $z_{max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ w punkcie $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$.