1.4 Zastosowanie całki podwójnej

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ciągłą w pewnym zbiorze domkniętym $\overline{D}$, przy czym $f(x,y) \geqslant 0$. Całka

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

przedstawia z definicji objętość bryły o podstawie $\overline{D}$, ograniczonej powierzchnią będącą wykresem funkcji $z = f(x,y)$ oraz powierzchnią walcową, utworzoną z prostych równoległych do osi Oz i przechodzących przez brzeg obszaru $\overline{D}$.

Całka

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

przedstawia pole zbioru $\overline{D}$.

Możemy zatem wyszczególnić następujące zastosowania geometryczne całki podwójnej:

[1.] **Obliczanie pola obszaru płaskiego D:**

Twierdzenie 6 *Pole obszaru płaskiego D w płaszczyźnie OXY obliczamy korzystając z następującego wzoru:* $|D| = \iint_D dxdy$

Przykład.
Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y^2 = 4x + 4$ i $y = 2 - x$.

Wyznaczając punkty wspólne naszych krzywych otrzymujemy: punkt $(0,2)$ i $(8,-6)$. Obszar D jest zbiorem normalnym względem osi OY, gdyż może zostać opisany nierównościami:
$-6 \leqslant y \leqslant 2, \quad \frac{y^2-4}{4} \leqslant x \leqslant 2 - y$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}|D| = \iint\limits_D dxdy &= \int_{-6}^{2}\left[\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} dx\right]dy = \int_{-6}^{2}\left[2 - y - \frac{1}{4}(y^2-4)\right]dy = \int_{-6}^{2}\left[3 - y - \frac{1}{4}y^2\right]dy \\ &= \left[3y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_{-6}^{2} = \frac{64}{3}.\end{aligned}$$

Przykład.
Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi $y = x$, $x = 0$ i $x^2 + y^2 = 2y$.

Obszar D, którego pola szukamy jest fragmentem koła $x^2 + y^2 \leqslant 2y$. Zatem w celu obliczenia całki użyjemy współrzędnych biegunowych. Równanie okręgu przy użyciu współrzędnych biegunowych możemy zapisać w postaci:

$$r^2 = 2r\sin\varphi,$$

skąd otrzymujemy warunek na r

$$r \in [0, 2\sin\varphi].$$

W powyższego warunku łatwo widać, że musi być $\sin\varphi \geqslant 0$, co jest równoważne $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ponadto zbiór nasz ograniczają proste $y = x$ i $x = 0$. Zatem nasz zakres kąta musi być zawężony do zbioru $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Zatem

$$\begin{aligned}|D| = \iint\limits_D dxdy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2\sin\varphi} rdr\right]d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[2\sin^2\varphi\right]d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[2\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right]d\varphi = \left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

[2.] Obliczanie objętości brył.
Z inetpretacji geometrycznej całki podwójnej wynika, że Jeżeli $f(x,y) \geqslant 0$, $(x,y) \in D$ to całka podwójna po zbiorze D z funkcji $f(x,y)$ przedstawia objętość bryły ograniczonej powierzchnią $z = f(x,y)$ i pobocznicą walca o podstawie D i płaszczyzny OXY. Objętość ta wyraża się wzorem $V = \iint_D f(x,y)dxdy$.

Przykład.
Obliczyć objętość bryły ograniczonej paraboloidą $z = x^2 + y^2$ i płaszczyznami $x + y = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Objętość obliczamy w tym przypadku w następujący sposób: (ponieważ $z = f(x,y)$, to u nas $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$|V| = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

Zbiór D znajuduje się na płaszczyźnie OXY, i opisują go warunki $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4 - x$. Zatem

$$\begin{aligned} |V| = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy &= \int_0^4 \left[\int_0^{4-x} (x^2 + y^2)dy \right] dx = \int_0^4 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{4-x} dx \\ &= \int_0^4 \left[x^2(4-x) + \frac{1}{3}(4-x)^3 \right] dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{12}(4-x)^4 \right]_0^4 = \frac{128}{3}. \end{aligned}$$

Przykład.
Obliczyć objętość bryły ograniczonej paraboloidą $z = 3 - x^2 - y^2$ i płaszczyzną $z = 0$.

Objętość obliczamy w tym przypadku w następujący sposób: (ponieważ $z = f(x,y)$, to u nas $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$

$$|V| = \iint\limits_D (3 - (x^2 + y^2))dxdy.$$

Zbiór D znajuduje się na płaszczyźnie OXY, czyli $z = 0$ opisuje warunek $x^2 + y^2 \leqslant 3$. Jest to koło, a zatem do obliczenia całki użyjemy współrzędnych biegunowych. Nasz zbiór D we współrzędnych biegunowych przyjmuje postać: $r^2 \leqslant 3$. Zatem $r \in [0, \sqrt{3}]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Stąd

$$\begin{aligned} |V| = \iint\limits_D (3 - (x^2 + y^2))dxdy &= \int_0^{\sqrt{3}} \left[\int_0^{2\pi} (3 - r^2) r d\varphi \right] dr = \int_0^{\sqrt{3}} \left[(3r - r^3)\varphi \right]_0^{2\pi} dr \\ &= 2\pi \left[\frac{3}{2}r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left[\frac{9}{2} - \frac{9}{4} \right] = \frac{9\pi}{2}. \end{aligned}$$