Całka powierzchniowa zorientowana - ćwiczenia

Zadanie 1. Korzystając z Twierdzenia 2 z wykładu obliczyć podane całki.

(a) $\iint\limits_{S^+} 3x\ dydz - y\ dzdx + z\ dxdy$, gdzie S^+ jest częścią powierzchni $z = 9 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$;

(b) $\iint\limits_{S^+} y\ dydz - 2x\ dzdx - z\ dxdy$, gdzie S^+ jest półsferą $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;

(c) $\iint\limits_{S^+} x\ dydz + y\ dzdx + z\ dxdy$, gdzie S^+ jest częścią powierzchni stożkowej $z = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, dla $x^2 + y^2 \leqslant 4$;

(d) $\iint\limits_{S^+} xz\ dydz + yz\ dzdx + xy\ dxdy$, gdzie S^+ jest częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dla $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, z \geqslant 0$;

(e) $\iint\limits_{S^-} (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$, gdzie S^- jest częścią powierzchni walcowej $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Rozwiązanie przykładu (a):
Mamy $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, skąd $f'_x = -2x$ i $f'_y = -2y$. Korzystamy z twierdzenia z wykładu i wstawiamy w miejsce z w funkcjach P, Q, R wyrażenie $9 - x^2 - y^2$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S^+} 3x\ dydz - y\ dzdx + z\ dxdy &= \iint\limits_{D} \left[3x \cdot (2x) - y \cdot (2y) + \left(9 - x^2 - y^2\right) \cdot 1\right] dxdy \\ &= \iint\limits_{D} (5x^2 - 3y^2 + 9)dxdy = I\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy całkę podwójną po obszarze D, który jest rzutem prostopadłym płata S na płaszczyznę xOy. Zatem jest to okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 3$. Korzystając ze współrzędnych biegunowych ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r \in [0, 3], \varphi \in [0, 2\pi]$) mamy

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 (5r^2\cos^2\varphi - 3r^2\sin^2\varphi + 9)r\ dr\right] d\varphi.$$

Korzystając z "jedynki trygonometrycznej" ($\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$) i redukując wyrazy podobne otrzymujemy

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 (8r^3\cos^2\varphi - 3r^3 + 9r)\ dr\right] d\varphi.$$

Korzystając ze wzoru na cosinus podwojonego kąta $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, wyliczamy $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}$ i podstawiamy do wyrażenia podcałkowego.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 \left(8r^3\left(\frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\right) - 3r^3 + 9r\right)\ dr\right] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 \left(4r^3\cos 2\varphi + r^3 + 9r\right)\ dr\right] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[[r^4]_0^3 \cdot \cos 2\varphi + \frac{1}{4}[r^4]_0^3 + \frac{9}{2}[r^2]_0^3\right] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[81\cos 2\varphi + \frac{81}{4} + \frac{81}{2}\right] d\varphi = 81\int_0^{2\pi} \left[\cos 2\varphi + \frac{3}{4}\right] d\varphi \\ &= 81\left(\frac{1}{2}[\sin 2\varphi]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}[\varphi]_0^{2\pi}\right) = 81\left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 2\pi\right) = \frac{243}{2}\pi.\end{aligned}$$

Rozwiązanie przykładu (c):
Mamy $z = f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, skąd $f'_x = -\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ i $f'_y = -\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$. Korzystamy z twierdzenia z wykładu i wstawiamy w miejsce z w funkcjach P, Q, R wyrażenie $1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S^+} x\ dydz + y\ dzdx + z\ dxdy &= \iint\limits_{D} \left[x \cdot \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) + y \cdot \left(\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot 1\right] dxdy \\
&= \iint\limits_{D} \left[\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right] dxdy = \iint\limits_{D} 1\ dxdy = 4\pi.
\end{aligned}$$

Wyrażenie $\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ po osunięciu niewymierności z mianownika przyjmuje postać $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$. Dostaliśmy całkę podwójną z 1, zatem jest to pole zbioru D, który jest rzutem prostopadłym płata S na płaszczyznę xOy. Przyjmując w równaniu płata $z = 0$ widzimy, że jest to okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 2$.

Zadanie 2.

(a) Oblicz całkę powierzchniową $\iint\limits_{S^+} x\ dydz + y\ dzdx + z^2\ dxdy$, gdzie S^+ jest płatem paraboloidy hiperbolicznej przedstawionej parametrycznie: $\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = 2uv \end{cases}$ dla $u^2 + v^2 \leqslant 1$.

(b) Oblicz całkę powierzchniową $\iint\limits_{S^+} -y\ dydz + x\ dzdx + (1+z^2)\ dxdy$, gdzie S^+ jest płatem powierzchni śrubowej danej równaniem parametryczne $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}$ $0 \leqslant u \leqslant 1$ oraz $-\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Rozwiązanie przykładu (a):

W tym przykładzie musimy skorzystać z Twierdzenia 1 z wykładu. Mamy:

$x'_u = 1\ ,\ y'_u = 1\ ,\ z'_u = 2v,$
$x'_v = 1\ ,\ y'_v = -1\ ,\ z'_v = 2u$
oraz

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 2u + 2v \quad , \quad B = \begin{vmatrix} 2v & 2u \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2v - 2u \quad , \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S^+} x\ dydz + y\ dzdx + z^2\ dxdy &= \iint\limits_{D} \left[(u+v)(2u+2v) + (u-v)(2v-2u) + (2uv)^2(-2)\right]\ dudv \\
&= \iint\limits_{D} \left[(2u^2 + 4uv + 2v^2) - (2u^2 - 4uv + 2v^2) - 8u^2v^2\right]\ dudv \\
&= \iint\limits_{D} \left[8uv - 8u^2v^2\right]\ dudv = 8\iint\limits_{D} \left[uv - u^2v^2\right]\ dudv = I.
\end{aligned}$$

Ponieważ $u^2+v^2 \leqslant 1$ zatem obszar D jest kołem o środku w poczatku układu współrzędnych i promieniu $r=1$. Korzystając ze współrzędnych biegunowych ($u = r\cos\varphi, v = r\sin\varphi, r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi]$) mamy

$$I = 8\int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (r^2\cos\varphi\sin\varphi - r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi)r \; d\varphi\right] dr.$$

Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta: $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ oraz cosinus podwojonego kąta $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$, skąd $\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ (zatem $\sin^2 2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\varphi$). Mamy

$$\begin{aligned}
I &= 8\int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}r^3\sin 2\varphi - \frac{1}{4}r^5\sin^2 2\varphi\right) \; d\varphi\right] dr \\
&= 8\int_0^1 \left[\frac{1}{2}r^3\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)_0^{2\pi} - \frac{1}{4}r^5\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) \; d\varphi\right] dr \\
&= 8\int_0^1 \left[\frac{1}{2}r^3\cdot 0 - \frac{1}{4}r^5\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)_0^{2\pi}\right] dr \\
&= 8\int_0^1 \left[-\frac{1}{4}r^5\left(\frac{1}{2}\cdot 2\pi - \frac{1}{8}\cdot 0\right)\right] dr = 8\int_0^1 \left[-\frac{1}{4}r^5\pi\right] dr \\
&= -2\pi\int_0^1 r^5 dr = -2\pi\cdot\frac{1}{6}[r^6]_0^1 = -\frac{1}{3}\pi.
\end{aligned}$$