Metody numeryczne - 2. rok Inżynierii i Analizy Danych

Laboratoria 2. Rozwiązywanie układów równań linowych. Metody dokładne.

Funkcje MATLABA:

diag(v,k=0) - tworzy macierz diagonalną, której elementami są składowe wektora v. Argument k przesuwa główną przekątną o k przekątnych w górę. Jeśli v jest macierzą, to funkcja zwraca wektor elementów tej macierzy znajdujących się na przekątnej.

eye(n) - tworzy macierz jednostkową wymiaru $n \times n$

zeros(n) - tworzy macierz złożoną z samych 0 wymiaru $n \times n$

ones(n) - tworzy macierz złożoną z samych 1 wymiaru $n \times n$

triu(A) - zwraca część macierzy leżącą poniżej głównej przekątnej (łącznie z tą przekątną)

tril(A) - zwraca część macierzy leżącą powyżej głównej przekątnej (łącznie z tą przekątną)

inv(A) - wyznacza macierz odwrotną do macierzy A. Odpowiada to operacji A^(-1)

size(A) - zwraca liczbę wierszy i kolumn macierzy A

det(A) - oblicza wyznacznik macierzy kwadratowej A

norm(A,p=2) - wyznacza normę macierzy/wektora A. p określa wybór normy (domyślnie=2 - norma Euklidesowa)

cond(A,p=2) - wyznacza wskaźnik uwarunowania macierzy A, korzystając z normy określonej przez parametr p

operator A \ B - dzielenie lewostronne B przez A

operator A / B - dzielenie prawostronne B przez A

operator A' - transponuje macierz A

lu(A) - zwraca rozkład macierzy A na macierze dolnie i górnie trójjątną L i U, takie, że $A = LU$

ilu(A) - niepełny rozkład macierzy A na macierze dolnie i górnie trójjątną L i U, takie, że $A \approx LU$. Działa szybciej niż `lu(A)`, ale wyniki są niedokładne.

chol(A) - zwraca rozkład Cholesky'ego macierzy A na macierze dolnie i górnie trójjątną R i R^T, takie, że $A = R^T * R$

ichol(A) - niepełny rozkład macierzy A na macierze dolnie i górnie trójjątną R i R^T, takie, że $A \approx R^T * R$. Działa szybciej niż `chol(A)`, ale wyniki są niedokładne.

Zadanie 1.

W MATLABIE napisz program/funkcję rozwiązujący układ równań w którym macierz A jest diagonalna. Zastosuj go do poniższej macierzy A i wektora b

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ -6 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Za pomocą funkcji i operatorów MATLABA, sprawdź poprawność uzyskanych wyników.

Zadanie 2.

W MATLABIE napisz programy/funkcje rozwiązujące układ równań w którym macierz A jest górnie trójkątna (osobno dolnie trójkątna). Dla macierzy A i wektora b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6,7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 45 \end{bmatrix}$$

wydziel część górnie trójkątną A_U (później dolnie trójkątną A_L) i rozwiąż układy równań $A_U x = b$ i $A_L x = b$. Za pomocą funkcji i operatorów MATLABA, sprawdź poprawność uzyskanych wyników.

Zadanie 3.
W MATLABIE napisz program znajdujący rozkłady $A = LU$ Doolittle'a i Croute'a. Zastosuj go do macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Porównaj wynik z rezultatem działania odpowiedniej funkcji MATLABA. Oblicz wyznacznik macierzy A i porównaj jego wartość z wartością wyznaczoną za pomocą funkcji MATLABA. Stosując algorytmy z poprzednich zadań, rozwiązujące "łatwe" układy równań, rozwiąż układ równań

$$Ax = b,$$

dla

$$b^T = [11 \;\; 0 \;\; -3]$$

Porównaj wynik z rozwiązaniami uzyskanymi za pomocą operatorów i funkcji MATLABA (za pomocą operatora dzielenia macierzy, i za pomocą mnożenia przez macierz odwrotną).

Zadanie 4.
W MATLABIE napisz program znajdujący rozkład Cholesky'ego $A = LL^T$. Zastosuj go do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{17}{16} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{33}{64} \end{bmatrix}$$

Porównaj wynik z rezultatem działania odpowiedniej funkcji MATLABA. Oblicz wyznacznik macierzy A i porównaj jego wartość z wartością wyznaczoną za pomocą funkcji MATLABA.

Zadanie 5.
W MATLABIE napisz program do rozwiązywania układów równań stosując metodę eliminacji Gaussa (w wersji podstawowej). Zastosuj napisany program do rozwiązania poniższych układów równań:

$$1) \begin{cases} x - 2y - 3z = -7 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x + 5y + z = 18 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 4y + 7z = -2 \\ 5x + 5y + 8z = 6 \\ 3x + 6y + 9z = -5 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y + t - 3u = 1 \\ 2x - z - 2u = 1 \\ x - y - 2z + t - 2u = 1 \\ 2x + z + u = -1 \\ -3x - y + z + 2t + 2u = 1 \end{cases}$$

Wyznacz wskaźniki uwarunkowania tych zadań. Sprawdź, czy te wskaźniki są równe $||A|| \cdot ||A^{-1}||$. Za pomocą funkcji i operatorów MATLABA, sprawdź poprawność uzyskanych wyników.

Zadanie 6.
W MATLABIE napisz program rozwiązujący układy równań $Ax = b$ stosując metodę Gaussa ze skalowanym wyborem elementu głównego. Zastosuj go do rozwiązania poniższych układów równań.

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$3)\ \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 = 6 \\ 5x_1 + 10x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 12 \end{cases}$$

Za pomocą funkcji i operatorów MATLABA, sprawdź poprawność uzyskanych wyników.

Zadanie 7.
Metoda Jordana-Gaussa, różni się od zwykłaej metody eliminacji Gaussa tym, że w k-tym kroku zeruje ona całą k-tą kolumnę za pomocą k-tego wiersza (a nie tylko część kolumny leżącą poniżej. W efekcie uzyskujemy macierz przekątniową. W MATLABIE napisz program rozwiązujący układ równań tą metodą i zastosuj ją do układów równań z zadania 5.

Zadanie 8.
W MATLABIE napisz program rozwiązujący układ równań

$$Ax = b$$

zwykłą metodą eliminacji Gaussa z następującymi modyfikacjami:

- Wstępnym wyważaniem kolumn
- Wstępnym wyważaniem wierszy

Sprawdź ich działanie na następujących macierzach A i wektorach b:

1)

$$n = 10, \quad a_{ij} = \left(\frac{i}{11}\right)^j, \quad b_i = i[1 - (\frac{i}{11})^{10}]/(33 - 3i)$$

2)

$$n = 4, \quad a_{ij} = \frac{1}{2n - i - j + 1}, \quad b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

3) Tak jak poprzednio ale dla n=10

Porównaj wyniki z wynikami dokładnymi.

Zadanie 9.
W MATLABIE napisz funkcję, która rozwiązuje układ równań metodą eliminacji Gaussa i dla zadanej w argumencie funkcji wartości naturalnej m, wykonuje dodatkowo m kroków poprawiania iteracyjnego i drukująca wartości r, e i x po każdej iteracji. Zastosuj tę metodę do rozwiązania układów równań z poprzedniego zadania, oraz dla poniższego układu równań

$$\begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 65 \\ 47 \end{bmatrix}$$

Porównaj wyniki z wynikami dokładnymi

Zadanie 10.
Zmodyfikuj funkcje z zadań 3. i 4., aby można było przy ich użyciu, wykonać dodatkowo m kroków poprawiania iteracyjnego dla użytych w tych zadaniach rozkładów LU i Cholesky'ego.

Zadanie 11.
W MATLABIE napisz program rozwiązujący układ równań stosując metodę eliminacji Gaussa z pełnym wyborem elementów głównych (zarówno w wierszu, jak i w kolumnie). W takim programie należy wykorzystać 2 wektory permutacji (do wierszy i kolumn). Porównaj działanie tej metody z metodą eliminacji Gaussa ze skalowanym wyborem elementu głównego.