PRZYKŁAD 1

ROZWIĄŻ ZAGADNIENIE CAUCHY'EGO $y'+y=\sin t \quad y(0)=0$

ZA POMOCĄ TRANSFORMATY LAPLACE'A.

(1) STOSUJEMY TRANSFORMATĘ LAPLACE'A DO OBYDWU STRON RÓWN.

$$y'+y=\sin t \quad /L$$

$L[y'+y]=L[\sin t]$ WYKORZYSTUJEMY LINIOWOŚĆ PRZEKSZTAŁCENIA

$L[y']+L[y]=L[\sin t]$ NASTĘPNIE Z WŁASNOŚCI RÓŻNICZKOWANIA ORYGINAŁU

$L[y']=s^1L[y]-y(0)$

$sL[y]-0+L[y]=L[\sin t]$

OZNACZMY $L[y(t)]=Y(s)$ ORAZ ODCZYTAJMY Z TABLIC $L[\sin 1\cdot t]=\frac{1}{s^2+1^2}$

$sY(s)+Y(s)=\frac{1}{s^2+1}$ → OTRZYMALIŚMY RÓWNANIE ALGEBRAICZNE, W KTÓRYM NIEWIADOMĄ JEST $Y(s)$

$$Y(s)(s+1)=\frac{1}{s^2+1} \quad /:(s+1)$$

(2)

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s+1)}$$

ROZKŁADAMY NA UŁAMKI PROSTE:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s+1)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{C}{s+1} \quad /(s^2+1)(s+1)$$

$$1=(As+B)(s+1)+C(s^2+1)$$

$s^2:\ A+C=0$

$-\ s^1:\ A+B=0$

$s^0:\ B+C=1$

$C-B=0$

$+\ B+C=1$

$2C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

$A=-C=-\frac{1}{2}$

$B=-A=\frac{1}{2}$

$$Y(s)=\frac{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+1}$$

$$Y(s)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-(-1)}$$

(3) STOSUJEMY TRANSFORMATĘ ODWROTNĄ LAPLACE'A

$$Y(s)=-\frac{1}{2}\frac{1s}{s^2+1^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-(-1)} \quad /L^{-1}$$

$L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\{-\frac{1}{2}\frac{1s}{s^2+1^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-(-1)}\}$ – LINIOWOŚĆ

$L^{-1}\{Y(s)\}=-\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1s}{s^2+1^2}\}+\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s^2+1^2}\}+\frac{1}{2}L^{-1}\{\frac{1}{s-(-1)}\}$ – TABLICE

$y(t)=-\frac{1}{2}\cos 1\cdot t+\frac{1}{2}\sin 1\cdot t+\frac{1}{2}e^{-1\cdot t}$ – ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE

PRZYKŁAD 2

ROZWIĄŻ ZAGADNIENIE POCZĄTKOWE $y'' - 3y' = e^{-3t}$ $y(0)=0, y'(0)=-1$

PONOWNIE WYKORZYSTAMY LINIOWOŚĆ:

$L[ay_1 \pm by_2] = aL[y_1] \pm bL[y_2]$

ORAZ TRÓŻNICZKOWANIE ORYGINAŁU:

$L[y''] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

W NASZYM PRZYPADKU:

$L[y'] = sY(s) - y(0)$

$$L[y'' - 3y'] = L[e^{-3t}]$$

$$L[y''] - 3L[y'] = L[e^{-3t}]$$

$$s^2Y(s) - 0\cdot s - (-1) - 3(sY(s) - 0) = \frac{1}{s+3}$$

$$Y(s)(s^2 - 3s) + 1 = \frac{1}{s+3}$$

$$Y(s)(s^2-3s) = \frac{1}{s+3} - 1 = \frac{1-s-3}{s+3} = \frac{-s-2}{s+3} \quad /:(s^2-3s)$$

$$Y(s) = \frac{-s-2}{(s+3)(s^2-3s)} = \frac{-s-2}{s(s+3)(s-3)}$$ — ROZKŁAD NA UŁAMKI PROSTE:

$$\frac{-s-2}{s(s+3)(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-3} \quad /\cdot s(s+3)(s-3)$$

$$-s-2 = A(s+3)(s-3) + Bs(s-3) + Cs(s+3)$$

$$-s-2 = As^2 - 9A + Bs^2 - 3Bs + Cs^2 + 3Cs$$

$s^2: 0 = A + B + C \qquad 0 = 3A + 3B + 3C$

$s^1: -1 = -3B + 3C \qquad + \; -1 = -3B + 3C$

$s^0: -2 = -9A \qquad -1 = 3A + 6C$

$A = \frac{2}{9} \qquad 6C = -1 - 3\cdot\frac{2}{9} = -\frac{5}{3}$

$B = -A - C = -\frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{1}{18} \qquad C = -\frac{5}{18}$

$$Y(s) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{s-(-3)} - \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{s-3}$$

$$L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{s-(-3)} - \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$y(t) = \frac{2}{9}\cdot 1 + \frac{1}{18}\, e^{-3t} - \frac{5}{18}\cdot e^{3t}$$

ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE