2. Pochodne cząstkowe

Definicja 1. *(Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu)*
Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem zmiennej x w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Można również oznaczać symbolem $f'_x(x_0, y_0)$. Analogicznie definiuje się pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem zmiennej y w punkcie (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Można również oznaczać symbolem $f'_y(x_0, y_0)$.

Uwaga 1. Analogicznie określamy pochodną cząstkową pierwszego rzędu dla funkcji trzech zmiennych.
Uwaga 2. Obliczając pochodne cząstkowe względem jednej zmiennej, pozostałe zmienne traktujemy jako stałe. Ponadto, stosujemy reguły różniczkowania znane z analizy funkcji jednej zmiennej.

Przykład 1
Obliczyć pochodne cząstkowe I rzędu funkcji:
$f(x, y) = x^3 - 2y^2 + 3xy^4 - x \ln xy$.
Zacznijmy od pochodnej cząstkowej I rzędu względem zmiennej x
(zmienną y będziemy traktować jak stałą):
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot y^4 - (1 \cdot \ln xy + x\dfrac{1}{xy} \cdot y) = 3x^2 + 3y^4 - \ln xy - 1.$
Obliczmy teraz pochodną cząstkową względem zmiennej y
(tym razem zmienną x będziemy traktować jak stałą):
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3 \cdot 0 - 4y + 3x \cdot 4y^3 - x \cdot \dfrac{1}{xy} \cdot x = -4y + 12xy^3 - \dfrac{x}{y}.$
Zauważmy, że w tym przypadku, wzór na pochodną iloczyny nie był konieczny.

Przykład 2
Obliczyć pochodne cząstkowe I rzędu funkcji:
$f(x, y, z) = x^y - 2x^3yz^4 + \cos\dfrac{y}{z}.$
Obliczmy pochodną cząstkową względem zmiennej x
(zmienne y i z traktujemy jak stałe):
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} - 2 \cdot 3x^2 \cdot yz^4 + 0 = yx^{y-1} - 6x^2yz^4.$
Obliczmy pochodną cząstkową względem zmiennej y
(zmienne x i z traktujemy jak stałe):
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x - 2x^3 \cdot 1 \cdot z^4 - \sin\frac{y}{z} \cdot \dfrac{1}{z} = x^y \ln x - 2x^3z^4 - \dfrac{1}{z}\sin\dfrac{y}{z}.$
Obliczmy pochodną cząstkową względem zmiennej z
(zmienne x i y traktujemy jak stałe):
$\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 - 2x^3y \cdot 4z^3 - \sin\dfrac{y}{z} \cdot (-\dfrac{y}{z^2}) = -8x^3yz^3 + \dfrac{y}{z^2}\sin\dfrac{y}{z}.$

Wprowadzimy teraz pojęcie pochodnych cząstkowych drugiego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) analogicznie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej.

Definicja 2. *(Pochodne cząstkowe drugiego rzędu)*
Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(x_0, y_0) \quad (\text{można oznaczać } f''_{xx}(x_0, y_0)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(x_0, y_0) \quad \text{(można oznaczać } f''_{yy}(x_0, y_0)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(x_0, y_0) \quad \text{(można oznaczać } f''_{yx}(x_0, y_0)),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(x_0, y_0) \quad \text{(można oznaczać } f''_{xy}(x_0, y_0)).$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nazywa się *czystymi*, a pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nazywa się *mieszanymi.*

Przykład 3

Obliczyć pochodne cząstkowe II rzędu funkcji:
$f(x, y) = x^3 - 2y^2 + 3xy^4 - x \ln xy$.

Zacznijmy od pochodnych cząstkowych czystych:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 + 3y^4 - \ln xy - 1\right) = 6x + 0 - \frac{1}{xy} \cdot y = 6x - \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-4y + 12xy^3 - \frac{x}{y}\right) = -4 + 12x \cdot 3y^2 - x \cdot (-\frac{1}{y^2}) = -4 + 36xy^2 + \frac{x}{y^2}.$$

Obliczmy teraz pochodne cząstkowe mieszane:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-4y + 12xy^3 - \frac{x}{y}\right) = 0 + 12y^3 - \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + 3y^4 - \ln xy - 1\right) = 0 + 12y^3 - \tfrac{1}{xy} \cdot x = 12y^3 - \frac{1}{y}.$$

Zwróćmy uwagę na pochodne cząstkowe mieszane, które są sobie równe.

Twierdzenie 1. *(Schwarza o pochodnych mieszanych)*
Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *są ciągłe w punkcie* (x_0, y_0)*, to są sobie równe, tj.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Uwaga 3. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla pochodnych mieszanych funkcji trzech zmiennych.
Podamy teraz twierdzenia o różniczkowalności funkcji w punkcie.

Twierdzenie 2. *(funkcja różniczkowalna w punkcie)*
Niech istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *oraz* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$*. Funkcja* f *jest różniczkowalna w punkcie* (x_0, y_0) *wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Uwaga 4. Istnienie pochodnych cząstkowych w punkcie nie gwarantuje różniczkowalności funkcji w tym punkcie.

Twierdzenie 3. *Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.*

Uwaga 5. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Na przykład funkcja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest ciągła w punkcie $(0, 0)$, ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna, ponieważ pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ nie istnieją.

Twierdzenie 4. *(warunek wystarczający różniczkowalności)*
Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ciągłe w punkcie (x_0, y_0), to jest różniczkowalna w tym punkcie.

Uwaga 6. Prawdziwe jest analogiczne twierdzenie dla funkcji trzech zmiennych.
Podamy teraz definicję różniczki funkcji dwóch zmiennych.

Definicja 3. *Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Różniczką funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy liniową funkcję $df(x_0, y_0)$ zmiennych Δx, Δy określoną wzorem:*

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Uwaga 7. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla funkcji trzech zmiennych.
Różniczkę funkcji można wykorzystać między innymi do:

- obliczeń przybliżonych:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y,$$

- szacowania błędów pomiarowych:

$$\Delta z \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y,$$

  gdzie $z = f(x, y)$, Δx, Δy oznaczają błędy bezwzględne pomiaru wielkości x i y, a Δz oznacza błąd bezwzględny obliczeń.

Przykład 4
Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się objętość V stożka o wysokości $h = 30$cm i promieniu podstawy $r = 10$cm jeżeli wysokość zwiększymy o 3mm, a promień podstawy zmniejszymy o 1mm.
Zacznijmy od uzgodnienia jednostek i wypisania danych:
$h_0 = 30\text{cm}, \quad r_0 = 10\text{cm}, \quad \Delta h = 0,3\text{cm}, \quad \Delta r = -0,1\text{cm}.$
(Przyrost może być zarówno dodatni, jak i ujemny).
Potrzebujemy jeszcze funkcji, która wyraża objętość stożka: $V(r, h) = 1/3\pi r^2 h$.
Następnie napiszmy odpowiedni wzór na różniczkę :
$dV = \frac{\partial V}{\partial r}(r_0, h_0)\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}(r_0, h_0)\Delta h.$
Obliczmy kolejno wszystkie potrzebne wyrazy do powyższego wzoru:
$\frac{\partial V}{\partial r}(r_0, h_0) = \frac{\partial V}{\partial r}(10, 30) = \frac{\partial}{\partial r}(1/3\pi r^2 h)|_{(10,30)} = (2/3\pi rh)|_{(10,30)} = 200\pi\text{cm}^2.$
$\frac{\partial V}{\partial r}(r_0, h_0) = \frac{\partial V}{\partial h}(10, 30) = \frac{\partial}{\partial h}(1/3\pi r^2 h)|_{(10,30)} = (1/3\pi r^2)|_{(10,30)} = 100/3\pi\text{cm}^2.$
Ostatecznie,
$dV = 200\pi \cdot (-0,1) + 100/3\pi \cdot 0,3 = -10\pi\text{cm}^3$. Oznacza to, że objętość stożka zmniejszy się w przybliżeniu o $31,4\text{cm}^3$.