Inżynieria Biomedyczna

Ćwiczenia 11.05.2020. - Zastosowania całki podwójnej- zadania

---

Zadanie 1. Obliczyć pole oszaru ograniczonego krzywymi:

a) $4y = x^2 - 4x,\ x - y - 3 = 0;$

b) $y^2 = 1 - x,\ y = \dfrac{1}{2}x + 1;$

c) $y^2 = 4x, x + y = 3, y \geqslant 0;$

d) $y = e^x, y = \ln x, x + y = 1, x = 2;$

e) $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ \ x = e,\ y = 0;$

f) $y = 3x - x^2, y = x;$

g) $y = 6 - x, y = \sqrt{x}, x = 6;$

h) $y = 6 - x, y = \sqrt{x}, y = 0;$

Rozwiązanie przykładu (c):

Wyznaczymy punkty wspólne krzywych ograniczających zbiór D. W tym celu rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = 3 - y \end{cases},$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$y^2 = 4(3 - y), \quad \text{które jest równoważne} \quad y^2 + 4y - 12 = 0.$$

Wyznaczając z powyższego równania y otrzymujemy $y = -6$ lub $y = 2$. Ponieważ w założeniach zadania $y \geqslant 0$ zatem nasz zbiór możemy opisać:

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ \frac{y^2}{4} \leqslant x \leqslant 3 - y \end{cases},$$

Oznacza to, że zbiór D ograniczony przez dane krzywe jest zbiorem normalnym względem osi OY. A zatem mamy

$$|D| = \iint_D dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dx \right) dy = \int_0^2 \left(3 - y - \frac{y^2}{4} \right) dy = \left[3y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{12}y^3 \right]_0^2 = 6 - 2 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

Rozwiązanie przykładu (d):

Gdybyśmy narysowali nasz zbiór to okazałoby się, że nie jest on zbiorem normalnym względem żadnej osi układu. Zatem możemy go opisać jako sumę dwóch zbiorów normalnych D_1 i D_2 takich, że

$$D_1 : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 - x \leqslant y \leqslant e^x \end{cases}, \qquad D_2 : \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \ln x \leqslant y \leqslant e^x \end{cases},$$

Zatem pole obszaru D obliczymy w następujący sposób:

$$|D| = \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{e^x} dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\ln x}^{e^x} dy \right) dx = \int_0^1 (e^x - 1 + x)\, dx$$
$$+ \int_1^2 (e^x - \ln x)\, dx = \left[e^x - x + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + [e^x]_1^2 - \int_1^2 \ln x dx = e - 1 + \frac{1}{2} - 1 + e^2 - e$$
$$- \left([x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx \right) = e^2 - \frac{3}{2} - 2\ln 2 + x_1^2 = e^2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Zadanie 2. Oblicz:

(a) objętość bryły ograniczonej paraboloidą $16 - x^2 - y^2 = 4z$ i płaszczyznami $x + y + z = 4,\ x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0.$

(b) objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = x^2 + y^2,\ z = 0,\ y = 3x,\ y = 3,$ $x = 0.$

(c) objętość bryły ograniczonej powierzchniami $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0,\ x + y + z = 3.$

Rozwiązanie przykładu (a):
Zbiór G możemy opisać w następujący sposób:

$$G = \{0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 4 - x,\ -x - y + 4 \leqslant z \leqslant \frac{16 - x^2 - y^2}{4}\}$$

stąd

$$|V| = \iint_G \left[\left(\tfrac{16 - x^2 - y^2}{4} \right) - (-x - y + 4) \right] dxdy = \iint_G (4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + x + y - 4) dxdy\ .$$

Obszar G traktujemy jako normalny względem osi Ox, zatem

$$G : \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 \leqslant y \leqslant 4 - x\ , \end{cases}$$

stąd

$$\begin{aligned} |V| &= \iint_G (4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + x + y - 4) dxdy \\ &= \int_0^4 \left(\int_0^{4-x} (4 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + x + y - 4) dy \right) dx \\ &= \int_0^4 \left(4y - \frac{x^2 y}{4} - \frac{y^3}{12} + xy + \frac{y^2}{2} - 4y \right)_0^{4-x} dx \\ &= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{11}{6}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{12} - \frac{11}{18}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x \right]_0^4 = \frac{32}{9}\ . \end{aligned}$$