Niezależność całki od drogi całkowania - ćwiczenia

Zadanie 1.

Sprawdź czy podane wyrażenia są różniczkami zupełnymi pewnych funkcji. Jeśli tak, wyznacz te funkcje.

(a) $(2x + 3x^2y)\ dx + (x^3 - 3y^2)\ dy$;

(b) $(x - y)\ dx + (2y - x)\ dy$;

(c) $(2x - y)\ dx - (x - 4y)\ dy$;

(d) $(xy^2)\ dx + (x^2y)\ dy$;

(e) $(x + yz)\ dx + (y + xz)\ dy + (z + xy)\ dz$.

Rozwiązanie przykładu (a):

Mamy $P(x, y) = 2x + 3x^2y$ oraz $Q(x, y) = x^3 - 3y^2$. Zatem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \quad \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Rozważane wyrażenie jest więc różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x, y)$ takiej, że

(1) $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) = 2x + 3x^2y$

oraz

(2) $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) = x^3 - 3y^2$

Z równania (1) otrzymujemy $F(x, y) = \int(2x + 3x^2y)\ dx = x^2 + yx^3 + \psi(y)$. Różniczkując otrzymaną funkcję względem zmiennej y mamy

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 + x^3 + \psi'(y)$.

Korzystając z równania (2) mamy $x^3 + \psi'(y) = x^3 - 3y^2$, zatem $\psi'(y) = -3y^2$. Stąd $\psi(y) = -y^3 + c$. Ostatecznie, funkcja $F(x, y)$ ma postać

$$F(x, y) = x^2 + yx^3 - y^3 + c.$$

Zadanie 2.

Sprawdź, że podane całki krzywoliniowe nie zależą od drogi całkowania a następnie oblicz te całki.

(a) $\int\limits_K (\sin x \cos y)\ dx + (\cos x \sin y)\ dy$, gdzie K jest dowolnym łukiem łączącym punkty $A = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oraz $B = (\pi, \pi)$;

(b) $\int\limits_K x\ dx + y\ dy$, gdzie K jest dowolnym łukiem łączącym punkty $A = (1, 1)$ oraz $B = (-1, -2)$;

(c) $\int\limits_K (x^2 - 2yz)\ dx + (y^2 - 2xz)\ dy + (z^2 - 2xy)\ dz$, gdzie K jest dowolnym łukiem łączącym punkty $A = (1, 1, 1)$ oraz $B = (2, 3, 4)$;

(d) $\int\limits_K (e^x \cos y)\, dx - (e^x \sin y)\, dy$, gdzie K jest dowolnym łukiem łączącym punkty $A = (0,0)$ oraz $B = (1, \frac{\pi}{2})$.

Rozwiązanie przykładu (d):

Mamy $P(x,y) = e^x \cos y$ oraz $Q(x,y) = -e^x \sin y$. Zatem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y \quad \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Całka nie zależy więc od drogi całkowania. Oznacza to, że istnieje funkcja $F(x,y)$ taka, że

(1) $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) = e^x \cos y$

oraz

(2) $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) = -e^x \sin y$

Z równania (1) otrzymujemy $F(x,y) = \int (e^x \cos y)\, dx = e^x \cos y + \psi(y)$. Różniczkując otrzymaną funkcję względem zmiennej y mamy

$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^x \sin y + \psi'(y)$.

Korzystając z równania (2) mamy $-e^x \sin y + \psi'(y) = -e^x \sin y$, zatem $\psi'(y) = 0$. Stąd $\psi(y) = c$. Ostatecznie, funkcja $F(x,y)$ ma postać

$$F(x,y) = e^x \cos y + c.$$

Korzystając z uogólnionego wzoru Newtona-Leibniza mamy

$$\int\limits_K (e^x \cos y)\, dx - (e^x \sin y)\, dy = F\left(1, \frac{\pi}{2}\right) - F(0,0) = e \cos \frac{\pi}{2} + c - e^0 \cos 0 - c = -1.$$

Całkę możemy policzyć także innym sposobem. Funkcja podcałkowa jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x,y)$, zatem całka nie zależy od kształtu krzywej całkowania. Korzystając z Wniosku 1 z wykładu możemy tę całkę policzyć po odcinku łączącym punkty A i B. Parametryzacja odcinka AB jest postaci (korzystając ze wzoru na parametryzację odcinka na płaszczyźnie):

$$AB : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{\pi}{2} t, \text{ gdzie } \ t \in [0,1]. \end{cases}$$

Liczymy pochodne: $x'(t) = 1, \ y'(t) = \frac{\pi}{2}$. Zatem

$$\int\limits_K (e^x \cos y)\, dx - (e^x \sin y)\, dy = \int\limits_0^1 (e^t \cos \tfrac{\pi}{2} t - \tfrac{\pi}{2} e^t \sin \tfrac{\pi}{2} t)\, dt = \int\limits_0^1 (e^t \cos \tfrac{\pi}{2} t)\, dt - \tfrac{\pi}{2} \int\limits_0^1 (e^t \sin \tfrac{\pi}{2} t)\, dt = I.$$

Licząc pierwszą całkę przez części otrzymujemy

$$I = \left(e^t \cos \tfrac{\pi}{2} t\right)_0^1 + \tfrac{\pi}{2} \int\limits_0^1 (e^t \sin \tfrac{\pi}{2} t)\, dt - \tfrac{\pi}{2} \int\limits_0^1 (e^t \sin \tfrac{\pi}{2} t)\, dt = \left(e^t \cos \tfrac{\pi}{2} t\right)_0^1 = e \cos \tfrac{\pi}{2} - e^0 \cos 0 = -1.$$

Zadanie 3.

Korzystając z Twierdzenia Greena obliczyć całki.

(a) $\oint\limits_K x^2y\ dx + xy(y+1)\ dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2+y^2+2y=0$ zorientowanym dodatnio;

(b) $\oint\limits_K (1-x^2)y\ dx + x(y^2+1)\ dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2+y^2=4$ zorientowanym dodatnio;

(c) $\oint\limits_K (x^2+y)\ dx + (x+y^2)\ dy$, gdzie K jest trójkątem o wierzchołkach $A=(1,1),\ B=(3,2)$ oraz $C(2,5)$ zorientowanym dodatnio;

(d) $\oint\limits_K y^2\ dx + 2x\ dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2+y^2=2$ zorientowanym dodatnio;

(e) $\oint\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\ dx + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\ dy$, gdzie K jest okręgiem jednostkowym zorientowanym dodatnio.

Rozwiązanie przykładu (e):

Funkcje $P(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ oraz $Q(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$ spełniają założenia twierdzenia Greena oraz
$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
Zatem

$$\oint\limits_K \sqrt{x^2+y^2}\ dx + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\ dy \quad = \quad \iint\limits_D \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\ dxdy = I$$

Zbiór D jest kołem jednostkowym, zatem korzystając ze współrzędnych biegunowych (po uproszczeniu rachunków) otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (1-\sin\theta)\ dr\right]\ d\theta = \int_0^{2\pi}(1-\sin\theta)\,[r]_0^1\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(1-\sin\theta)\ d\theta = [\theta-\cos\theta]_0^{2\pi} = (2\pi-\cos 2\pi)-(0-\cos 0) = 2\pi. \end{aligned}$$