Ekstrema funkcji dwóch zmiennych - ćwiczenia

Przykład 1. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Rozwiązanie tego zadania rozpoczniemy od obliczenia pochodnych cząstkowych. Mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y.$$

Wyznaczymy teraz wszystkie pary (x,y), dla których warunek konieczny istnienia ekstremum jest spełniony. Zatem warunek

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

jest równoważny warunkowi

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x & = & 0 \\ 2xy + 2y & = & 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $2y(x+1) = 0$, a stąd otrzymujemy $y = 0$ lub $x = -1$.

Podstawiając $y = 0$ do pierwszego równania mamy: $6x^2 + 10x = 0$, czyli $2x(3x+5) = 0$. A zatem $x = 0$ lub $x = -\frac{5}{3}$. Otrzymaliśmy dwa punkty, w których może być ekstremum. Są to punkty $A(0,0)$, $B(-\frac{5}{3}, 0)$.

Podstawiając $x = -1$ do pierwszego równania mamy: $6 + y^2 - 10 = 0$, czyli $y^2 = 4$. A zatem $y = 2$ lub $y = -2$. Otrzymaliśmy kolejne dwa punkty, w których może być ekstremum. Są to punkty $C(-1,2)$, $D(-1,-2)$.

Do warunku dostatecznego istnienia ekstremum potrzebujemy pochodnych rzędu drugiego. Mamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 2.$$

Dla punktu $A(0,0)$ mamy (korzystamy ze wzoru podanego na wykładzie)

$$W(A) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

co oznacza, że w tym punkcie jest ekstremum. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 10 > 0$, jest to minimum lokalne równe $f(0,0) = 0$.

W punkcie $B(-\frac{5}{3}, 0)$ mamy

$$W(B) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \tfrac{40}{3} > 0,$$

co oznacza, że w tym punkcie też jest ekstremum. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = -10 < 0$, jest to maksimum lokalne równe $f(-\frac{5}{3}, 0) = \frac{125}{27}$.

Dla punktów $C(-1,2)$ i $D(-1,-2)$ mamy:

$$W(C) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0, \quad W(D) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0,$$

co oznacza, że w tych punktach ekstremum nie występuje.

Przykład 2. Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y + 2$.

Rozwiązanie tego zadania rozpoczniemy od wyznaczenia dziedziny D_f: $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Teraz obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 1.$$

Wyznaczymy teraz wszystkie pary (x,y) dla których warunek konieczny istnienia ekstremum jest spełniony. Warunek

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

jest równoważny warunkowi

$$\begin{cases} -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} & = & 0 \\ -\frac{x}{y^2} + 1 & = & 0. \end{cases}$$

Jeśli pierwsze równanie pomnożymy przez x^2y, a drugie przez y^2, to otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} -8y + x^2 & = & 0 \\ -x + y^2 & = & 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $x = y^2$ i wstawiamy do pierwszego

$$-8y + y^4 = 0, \quad \text{czyli} \quad y(-8 + y^3) = 0, \quad \text{a stąd} \quad y = 0 \quad \text{lub} \quad y = 2.$$

Ale $y = 0 \notin D_f$, więc mamy tylko jeden punkt stacjonarny $A = (4,2)$, bo dla $y = 2$ otrzymujemy $x = y^2 = 4$.

Do warunku dostatecznego potrzebujemy pochodnych rzędu drugiego. Mamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{16}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}.$$

Dla punktu $A(4,2)$ mamy

$$W(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0,$$

co oznacza, że w tym punkcie jest ekstremum. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = \frac{1}{4} > 0$, jest to minimum równe $f(4,2) = 8$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Wyznaczyć ekstrema funkcji:

   (a) $f(x,y) = y^3 - 3xy^2 + 6xy - 3x^2 - 15y + 15x$

   (b) $f(x,y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$

   (c) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

   (d) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$

Odpowiedzi. 1.(a) $A = (\frac{5}{2}, 0)$, $B = (1,-1)$, $C = (1,3)$, max w A ; 1.(b) $A = (\frac{3}{2}, 1)$, $B = (\frac{27}{2}, 5)$, min w B; 1.(c) $A = (1,2)$, $B = (-1,-2)$, $C = (2,1)$, $D = (-2,-1)$, min w C, max w D; 1.(d) min w $A = (\frac{1}{2}, 4)$