Metody numeryczne - 2. rok Inżynierii i Analizy Danych

Laboratoria 1. Reprezentacja liczb w pamięci komputera. Arytmetyka zmiennopozycyjna, błędy obliczeń.

Zadanie 1.
Podane liczby w systemie dziesiętnym zamień na liczby w systemie dwójkowym. Podaj ich reprezentację w arytmetyce z 5-cyfrowymi mantysami:

1) $\frac{2}{3}$
2) $197,875$
3) $0,22$
4) $1541,2$
5) $\frac{13}{6}$

Znajdź względne błędy tych reprezentacji.

Zadanie 2.
Podane liczby w systemie dziesiętnym zamień na liczby w systemie dwójkowym, a następnie wykonaj ich odejmowanie w arytmetyce z 5-cyfrowymi mantysami

1) $\frac{7}{6}$ i $\frac{1}{9}$
2) $\frac{7}{5}$ i $\frac{1}{3}$

Znajdź względne błędy tych różnic.

Zadanie 3.
W Matlabie napisz program wyznaczający najmniejszą liczbę dodatnią postaci $\varepsilon = 2^{-t}$ (tzw. epsilon maszynowy) dla której $1 + \varepsilon \neq 1$. Dlaczego aby wyznaczyć tę liczbę $1 + \varepsilon$ przyrównujemy do 1, a nie ε do 0?

Zadanie 4.
W Matlabie napisz program wyznaczający reprezentację najmniejsze możliwej do reprezentacji liczby (wyznacz jej cechę), czyli liczby postaci $\varepsilon = 2^{-t}$ dla której $\varepsilon \neq 0$. Znajdź największą możliwą do reprezentacji liczbę postaci $\epsilon = 2^k$.

Zadanie 5.
Niech

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1, \qquad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$$

W Matlabie napisz program który porównuje wartości tych funkcji dla liczb postaci $x = 8^{-1}, 8^{-2}, 8^{-3}, \ldots$. Które wyniki są bardziej wiarygodne?

Zadanie 6.
W Matlabie napisz program wyznaczający wartość $y = a^2 - b^2$ dla liczb a postaci $a = b + h$, gdzie $h = 2^{-t}$ dla kolejnych wartości całkowitych t, i $b = 1$ na dwa sposoby: bezpośrednio ze wzoru, oraz korzystając ze wzoru skróconego mnożenia. Które wyniki są bardziej wiarygodne?

Zadanie 7.
W Matlabie napisz program, który wyznacza kolejne przybliżenia pochodnej, korzystając ze wzoru:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

dla podanych poniżej funkcji f i wartości punktu x_0, oraz wartości h postaci 2^{-t}.

1) $f(x) = x^2, \quad x_0 = 1$

2) $f(x) = x^3 + x, \quad x_0 = 1$

3) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 2$

4) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$

5) $\frac{2^x}{\ln 2}, \quad x = 1$

Zadanie 8.
W programie Matlab wyznacz pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2px + q$, klasycznym algorytmem:

```
x1=p+sqrt(p*p-q);
x2=p-sqrt(p*p-q)
```

oraz zmodyfikowanym algorytmem

```
if (p>=0) then{
  x1=p+sqrt(p*p-q);
  x2=q/x1;
}
else{
  x2=p-sqrt(p*p-q);
  x1=q/x2;
}
```

dla q i p z poniższej tabeli. W tabeli są podane również dokładne wartości pierwiastków.

p	q	dokładna wartość
-0.435001	$0.174 \cdot 10^{-5}$	$x_1 = -0.2 \cdot 10^{-5} \quad x_2 = -0.87$
10^5	2	$x_1 = 0.2 \cdot 10^6 \quad x_2 = 0.1 \cdot 10^{-4}$
$0.499981 \cdot 10^3$	1.99992	$x_1 = 0.99996 \cdot 10^3 \quad x_2 = 0.2 \cdot 10^{-2}$

Zadanie 9.
Całkę $y_n \int_0^1 x^n e^x dx$, można stosując całkowanie przez części sprowadzić do postaci

$$y_n = \int_0^1 x^n e^x dx = x^n e^x|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x = e - ny_{n-1}.$$

Czyli całka ta wyraża się wzorem rekurencyjnym

$$y_{n+1} = e - (n+1)y_n$$

i oczywiście

$$y_0 = e - 1, \qquad y_1 = 1.$$

W programie Matlab startując od wartości $y_1 = 1$ stosując powyższy wzór rekurencyjny wyznacz wartości kolejnych całek, aż do $n = 20$.

Zadanie 10.
Poniższy wzór rekursywny pozwala wyznaczać kolejne potęgi liczby $\frac{1}{3}$:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{3} & n = 1 \\ \frac{13}{3}x_n - \frac{4}{3}x_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

W programie Matlab wyznacz 20 kolejnych wyrazów tego ciągu porównując je z wartościami $(\frac{1}{3})^n$

Zadanie 11.
Wyrażenie $x - \sin x$ można obliczyć stosując rozwinięcie funkcji $\sin x$ w szereg Tayora, czyli w postaci

$$x - \sin x = x - (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \ldots$$

Wyznacz w programie Matlab wartości wyrażenia $x - \sin x$ dla x postaci 2^{-t} dla $t = 1, 2, \ldots$ na 2 sposoby - bezpośrednio i korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora. W tym drugim przypadku usprawnij obliczenia wykorzystując fakt, że kolejne składniki sumy w szeregu Taylora wyrażają się wzorem rekurencyjnym

$$a_n = \begin{cases} x & \text{dla} \quad n = 0 \\ a_{n-1} \cdot \frac{-x^2}{2n(2n+1)} & \text{dla} \quad n > 0 \end{cases}$$

i wartość tej sumy można wyznaczyć w postaci

$$s = \frac{x^3}{6}(1 - \frac{x^2}{20})(1 - \frac{x^2}{42} \ldots)$$

Które wyniki są bardziej wiarygodne?

Zadanie 12.
Tak jak w poprzednim zadaniu wyznacz wartość wyrażenia $1 - \cos x$ na 2 sposoby. Wyrażenie z rozwinięciem $\cos x$ w szereg Taylora ma posać

$$1 - \cos x = 1 - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots) = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots$$

a wzór rekurencyjny za pomocą którego można wyznaczyć kolejne składniki szeregu ma postać

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ a_{n-1} \cdot \frac{-x^2}{2n(2n-1)} & \text{dla} \quad n > 0 \end{cases}$$

Zadanie 13.
Wyznacz w programie Matlab wartości 3 (identycznych) funkcji określonych poniższymi wzorami

$$f(x) = x^8 - 8x^7 + 28x^6 - 56x^5 + 70x^4 - 56x^3 + 28x^2 - 8x + 1,$$
$$g(x) = (((((((x - 8)x + 28)x - 56)x + 70)x - 56)x + 28)x - 8)x + 1,$$
$$h(x) = (x - 1)^8$$

w 101 równoodległych punktach od $0,99$ do $1,01$. Dlaczego niektóre z wartości tych funkcji są ujemne? Narysuj wykresy tych funkcji na podstawie wyznaczonych punktów z przedziału $0,99$ do $1,01$.

Zadanie 14.
W programie Matlab wyznacz iloczyn skalarny wektorów:

$$x = (2,718281828; -3,141592654; 1,414213562; 0,5772156649; 0,3010299957)$$

$$y = (1486.2497; 878366,9879; -22,37492; 4773714,647; 0,000185049).$$

Iloczyn ten wyznacz czterema sposobami:

1) sumując składniki w podanym porządku,
2) sumując składniki od ostatniego do pierwszego,
3) sumując oddzielnie dodatnie iloczyny od największego do najmniejszego, a ujemne iloczyny od najmniejszego do największego i dodając te 2 sumy częściowe,
4) postępując tak jak w poprzednim punkcie, ale zmieniając kolejność sumowania na przeciwną

Zadanie 15.
Rozwiąż zadanie 14 usuwając z 2 ostatnich współrzędnych wektora x ostatnią cyfrę. Przeanalizuj jak tak mała zmiana wartości współrzędnych wpływa na wyniki?

Zadanie 16.
Oblicz w Matlabie $f(40545, 70226)$, gdzie

$$f(x, y) = 9x^4 - y^4 + 2y^2,$$

następującymi sposobami

1) Wykonaj działania zgodnie z powyższym wzorem
2) Jako że
$$f(x, y) = (3x^2 - y^2 + 1)(3x^2 + y^2 - 1) + 1,$$
wykonaj obliczenia jak w poprzednim punkcie, ale korzystając z tego wzoru.

Zadanie 17.
Przeanalizuj na wybranych przykładach poniższy algorytm Gilla-Möllera, służący do sumowania wyrazów ciągu (szczególnie skutecznego w przypadku sumowania dużej liczby elementów). W szczególności zastosuj go do szeregu

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

dla dużych wartości n (rzędu 100000). Jak wiadomo szereg ten jest rozbieżny, czy tak będzie też w przypadku realizacji tego sumowania w arytmetyce zmiennopozycyjnej?

Algorytm Gilla-Möllera:

```
u=0;p=0;
for i=1:n
v=i-ty wyraz sumowanego ciagu;
s=u+v;
p=u-s+v+p;
u=s;
end
z=s+p
```