Rozdział XVI

CAŁKI FUNKCJI WYMIERNYCH

§ 16.1. UWAGI OGÓLNE

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów. Całka funkcji wymiernej jest więc postaci

$$(16.1.1)\qquad \int \frac{W_1(x)}{W_2(x)}dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}dx.$$

Można wykazać, że całka funkcji wymiernej jest zawsze równa pewnej kombinacji liniowej (por. notkę na str. 149) następujących funkcji: funkcji wymiernej, logarytmu funkcji liniowej, logarytmu funkcji kwadratowej (o wyróżniku ujemnym) oraz arcustangensa funkcji liniowej. Przy obliczaniu całki (16.1.1) należy postępować w następujący sposób:

1° Jeżeli $n \geqslant m$, to licznik dzielimy przez mianownik i funkcję podcałkową przedstawiamy jako sumę wielomianu oraz funkcji wymiernej, w której już stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika ($n<m$).

2° Jeżeli $n<m$, to funkcję podcałkową rozkładamy na tzw. *ułamki proste*, tj. na wyrażenia postaci

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad \text{oraz} \quad \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)^p},$$

gdzie A, B, C, a, b, c, d, e są stałe, przy czym $d^2-4ce<0$ (wyróżnik trójmianu cx^2+dx+e jest ujemny), a k i p są liczbami naturalnymi.

Sposób rozkładania funkcji wymiernej na ułamki proste oraz obliczenia całek ułamków prostych zostanie przedstawiony w podanych niżej zadaniach.

§ 16.2. METODY CAŁKOWANIA

ZADANIE 16.1 Obliczyć całkę

$$(1)\qquad \int \frac{dx}{ax+b} \quad (a\neq 0).$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $ax+b\neq 0$. Wykonujemy podstawienie $ax+b=t$. Różniczkując otrzymujemy $a\,dx=dt$, skąd $dx=\frac{1}{a}\,dt$. Podstawiamy te wartości całki (1):

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\int\frac{\frac{1}{a}\,dt}{t}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

ZADANIE 16.2. Obliczyć całkę $\int(ax+b)^n\,dx$, $(a\neq 0)$.

Rozwiązanie. Dla $n=-1$ całka powyższa została obliczona w zadaniu poprzednim. Załóżmy więc, że $n\neq -1$. Jeżeli n jest liczbą całkowitą ujemną, to zakładamy ponadto, że $ax+b\neq 0$, a jeżeli n nie jest liczbą całkowitą, to zakładamy, że $ax+b>0$. Wykonujemy podstawienie $ax+b=t$, skąd $a\,dx=dt$, czyli $dx=\frac{1}{a}\,dt$. Obliczamy

$$\int(ax+b)^n dx=\int t^n\cdot\frac{1}{a}\,dt=\frac{1}{a}\int t^n dt=\frac{1}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C.$$

ZADANIE 16.3. Obliczyć całkę

$$\int\frac{cx+d}{ax+b}\,dx,\qquad a\neq 0$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $ax+b\neq 0$. Zgodnie z uwagą ogólną, jaką zrobiliśmy na początku tego rozdziału, dzielimy licznik przez mianownik

$$\frac{cx+d}{ax+b}=\frac{c}{a}+\frac{d-\frac{bc}{a}}{ax+b},$$

a więc

$$\int\frac{cx+d}{ax+b}\,dx=\frac{c}{a}\int dx+\left(d-\frac{bc}{a}\right)\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{c}{a}\,x+\frac{ad-bc}{a^2}\ln|ax+b|+C.$$

W dalszym ciągu zajmiemy się całkami typu

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx\qquad(a\neq 0). \tag{16.2.1}$$

Przede wszystkim sprawdzamy, czy licznik nie jest pochodną mianownika. Wówczas bowiem wynik otrzymujemy natychmiast posługując się wzorem

$$\int\frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+C. \tag{16.2.2}$$

ZADANIE 16.4. Przyśpieszenie w danym ruchu prostoliniowym wyraża się wzorem

$$a=4t^3+\frac{1}{t+1}.$$

Wyznaczyć wzór określający prędkość v w zależności od czasu t, jeżeli wiadomo, że dla $t=0$ jest $v=v_0$; wyznaczyć również wzór określający drogę x, jeżeli dla $t=0$ jest $x=x_0$.

Rozwiązanie. Mamy

$$v=\int a\,dt=\int\left(4t^3+\frac{1}{t+1}\right)dt=t^4+\ln|t+1|+C;$$

podstawiając $t=0$ otrzymujemy $v_0=C$, a więc

$$v=t^4+\ln|t+1|+v_0.$$

Dalej,

$$x=\int v\,dt=\int(t^4+\ln|t+1|+v_0)\,dt=\tfrac{1}{5}t^5+(t+1)\ln|t+1|-t+v_0t+C_1.$$

Dla $t=0$ mamy $x=x_0=C_1$, a więc

$$x=\tfrac{1}{5}t^5+(t+1)\ln|t+1|+t(v_0-1)+x_0.$$

Zadanie 16.5. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{6x-1}{3x^2-x+2}\,dx.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego znajdującego się w mianowniku funkcji podcałkowej: $\Delta=1-24<0$. Z tego wniosek, że mianownik nie staje się zerem przy żadnej wartości x.

Zauważmy że $(3x^2-x+2)'=6x-1$, tzn. że licznik jest pochodną mianownika. Otrzymujemy $I=\ln(3x^2-x+2)+C$.

Zadanie 16.6. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{x-3}{x^2-6x+5}\,dx.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik trójmianu znajdującego się w mianowniku: $\Delta=36-20=4^2$. Mianownik ma pierwiastki $x_1=1$, $x_2=5$. Zakładamy $x\neq 1$ i $x\neq 5$. Zauważmy, że $(x^2-6x+5)'=2x-6=2(x-3)$, tzn. że pochodna mianownika jest proporcjonalna do licznika. Otrzymujemy

$$=\tfrac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+5}\,dx=\tfrac{1}{2}\ln|x^2-6x+5|+C.$$

Jeżeli licznik nie jest pochodną mianownika (ani nie jest do niej proporcjonalny), to sposób obliczania takich całek zależy od znaku wyróżnika $\Delta=b^2-4ac$ trójmianu kwadratowego występującego w mianowniku funkcji podcałkowej. Rozpatrzymy przypadki: $\Delta>0$ (zad. 16.7 - 16.8), $\Delta=0$ (zad. 16.9 i 16.10) oraz $\Delta<0$ (zad. 16.11 - 16.14).

Zadanie 16.7. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{2x^2+9x-5}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik trójmianu znajdującego się w mianowniku: $\Delta=81+40=121=11^2$. Mianownik ma pierwiastki -5 i $\frac{1}{2}$, a więc

$$2x^2+9x-5\equiv 2(x-\tfrac{1}{2})(x+5)\equiv(2x-1)(x+5).$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy ograniczenia: $x\neq -5$, $x\neq\frac{1}{2}$.

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

$$\frac{1}{2x^2+9x-5}\equiv\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+5}.$$

Mnożąc obie strony równania przez $(2x-1)(x+5)$ otrzymujemy

$$1\equiv A(x+5)+B(2x-1),\qquad \text{skąd}\qquad 1\equiv(A+2B)x+(5A-B).$$

$Ax+5A+B2x-B$

Mamy tutaj do czynienia z tożsamością, czyli związkiem, który ma miejsce dla każdego x. Z tożsamości powyższej wynikają następujące zależności (przez przyrównanie współczynników przy równych potęgach x po obu stronach tożsamości):

$$A+2B=0,\ 5A-B=1,\qquad \text{skąd}\qquad A=\tfrac{2}{11},\ B=-\tfrac{1}{11}.$$

Wracając do funkcji podcałkowej otrzymujemy rozkład

$$\frac{1}{2x^2+9x-5}\equiv\frac{\frac{2}{11}}{2x-1}-\frac{\frac{1}{11}}{x+5}.$$

Całkujemy obie strony tożsamości i po prawej stronie wynosimy czynniki stałe przed całki

$$\int\frac{dx}{2x^2+9x-5}=\frac{2}{11}\int\frac{dx}{2x-1}-\frac{1}{11}\int\frac{dx}{x+5}=$$
$$=\tfrac{2}{11}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\ln|2x-1|-\tfrac{1}{11}\ln|x+5|+C=$$
$$=\tfrac{1}{11}\ln|2x-1|-\tfrac{1}{11}\ln|x+5|+C=\tfrac{1}{11}\ln\left|\frac{2x-1}{x+5}\right|+C.$$

Zadanie 16.8. Obliczyć całkę

$$\int\frac{11x-1}{2x^2-5x-2}\,dx.$$

Rozwiązanie. Postępujemy podobnie, jak w poprzednim zadaniu; mamy $\Delta=25+24=$ $=49$, skąd $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=2$, a więc

$$3x^2-5x-2\equiv 3(x+\tfrac{1}{3})(x-2)\equiv(3x+1)(x-2).$$

Zakładając, że $x\neq-\frac{1}{3}$ i $x\neq 2$, rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

(1) $$\frac{11x-1}{3x^2-5x-2}\equiv\frac{A}{3x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

Mnożąc obie strony przez wspólny mianownik otrzymujemy

(2) $$11x-1 \equiv A(x-2)+B(3x+1).$$

W przykładzie tym zastosujemy inną metodę obliczania współczynników. W miejsce x podstawiamy kolejno pierwiastki mianownika funkcji podcałkowej (tożsamość bowiem jest równością spełnioną dla każdego x). Przyjmując $x=2$(¹) otrzymujemy

$$22-1=B\cdot 7, \quad \text{skąd} \quad B=3.$$

Podobnie przyjmując $x=-\frac{1}{3}$ mamy

$$-\tfrac{11}{3}-1=A(-\tfrac{1}{3}-2), \quad \text{skąd} \quad A=2.$$

A więc

$$\frac{11x-1}{3x^2-5x-2} \equiv \frac{2}{3x+1}+\frac{3}{x-2}.$$

Obliczamy

$$\int \frac{11x-1}{3x^2-5x-2}\,dx = 2\int \frac{dx}{3x+1}+3\int \frac{dx}{x-2} = \frac{2}{3}\ln|3x+1|+3\ln|x-2|+C.$$

ZADANIE 16.9. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{9x^2-12x+4}.$$

Rozwiązanie. Mamy $\Delta=144-144=0$, a więc mianownik jest kwadratem zupełnym

$$9x^2-12x+4=(3x-2)^2.$$

Zakładamy, że $x \neq \frac{2}{3}$, i obliczamy

$$\int \frac{dx}{9x^2-12x+4} = \int \frac{dx}{(3x-2)^2} = \int (3x-2)^{-2}dx = \frac{(3x-2)^{-1}}{(-1)3}+C$$

(por. zadanie 16.2). Ostatecznie więc

$$\int \frac{dx}{9x^2-12x+4} = \frac{-1}{3(3x-2)}+C.$$

ZADANIE 16.10. Obliczyć całkę

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx.$$

Rozwiązanie. Mamy $\Delta=36-36=0$. Mianownik jest pełnym kwadratem

$$9x^2-6x+1 \equiv (3x-1)^2.$$

(¹) Przy mnożeniu tożsamości (1) przez wspólny mianownik musimy wprawdzie wykluczyć wartości $x=2$, $x=-\frac{1}{3}$, dla których mianownik równa się zeru, ale mimo to tożsamość (2) jest spełniona i dla tych wartości: po obu stronach tożsamości (2) znajdują się bowiem wielomiany, a więc funkcje ciągłe dla każdego x: z ciągłości w punktach $x=2$, $x=-\frac{1}{3}$ i równości wielomianów dla pozostałych x wynika równość wielomianów i dla tych dwóch wartości x.

Zakładamy, że $x \neq \frac{1}{3}$. Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste w następujący sposób:

$$\frac{9x-5}{9x^2-6x+1} \equiv \frac{A}{(3x-1)^2} + \frac{B}{3x-1}.$$

Mnożąc obie strony równości przez wspólny mianownik otrzymujemy

$$9x-5 \equiv A + B(3x-1) \equiv 3Bx + (A-B).$$

Rozwiązujemy układ równań

$$3B=9, \quad A-B=-5, \quad \text{skąd} \quad B=3, \ A=-2.$$

Otrzymujemy tożsamość

$$\frac{9x-5}{9x^2-6x+1} \equiv \frac{-2}{(3x-1)^2} + \frac{3}{3x-1}.$$

Całkujemy

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx = -2\int \frac{dx}{(3x-1)^2} + 3\int \frac{dx}{3x-1} =$$

$$= -2\left(\frac{-1}{3(3x-1)}\right) + 3 \cdot \frac{1}{3} \ln|3x-1| + C.$$

Ostatecznie więc

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}\,dx = \frac{2}{3(3x-1)} + \ln|3x-1| + C.$$

ZADANIE 16.11. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{x^2+b} \quad (b>0).$$

Rozwiązanie. Wykonujemy podstawienie

(1) $$x = \sqrt{b}\cdot t, \quad \text{skąd} \quad dx = \sqrt{b}\,dt.$$

Na podstawie wzoru na zamianę zmiennych otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^2+b} = \int \frac{\sqrt{b}\,dt}{bt^2+b} = \frac{\sqrt{b}}{b}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} t + C.$$

Ostatecznie po podstawieniu na t odpowiedniej wartości ze wzoru (1) otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^2+b} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{b}} + C \quad (b>0).$$

W szczególności np. mamy

$$\int \frac{dx}{2x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{9}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}} + C = \frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{3} x + C.$$

ZADANIE 16.12. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{(x-k)^2+b} \quad (b>0).$$

Rozwiązanie. W całce tej postaci wykonujemy podstawienie

$$x-k=\sqrt{b}\cdot t, \quad \text{skąd} \quad dx=\sqrt{b}\,dt.$$

Podstawiając powyższe wartości do całki mamy (por. zad. 16.11):

$$\int \frac{dx}{(x-k)^2+b}=\int \frac{\sqrt{b}\,dt}{bt^2+b}=\frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg} t+C.$$

Ale $t=\dfrac{x-k}{\sqrt{b}}$. Ostatecznie więc

$$\int \frac{dx}{(x-k)^2+b}=\frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg}\frac{x-k}{\sqrt{b}}+C \quad (b>0).$$

Do całki omówionej w powyższym zadaniu możemy sprowadzić każdą całkę typu

(16.2.3) $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a\neq 0 \text{ i } b^2-4ac<0),$$

a to na podstawie postaci kanonicznej trójmianu (por. str. 190):

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right].$$

Mianownik funkcji podcałkowej piszemy w postaci kanonicznej, a następnie czynnik $1/a$ wynosimy przed całkę.

ZADANIE 16.13. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+27}.$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyróżnik mianownika $\Delta=144-216=-72$. Sprowadzamy mianownik do postaci kanonicznej

$$2x^2-12x+27=2\left(x-\tfrac{12}{2\cdot 2}\right)^2+\tfrac{72}{4\cdot 2}\equiv 2(x-3)^2+9.$$

A więc

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+27}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2+\frac{9}{2}}.$$

Wykonujemy podstawienie (patrz zadanie 16.12):

$$x-3=\sqrt{\tfrac{9}{2}}\cdot t, \quad \text{skąd} \quad dx=\sqrt{\tfrac{9}{2}}\,dt.$$

Postępując jak w zadaniu 16.12 otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{2x^2-12x+27}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}(x-3)\right)+C.$$

Zadanie 16.14. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5}\,dx.$$

Rozwiązanie. Wyróżnik mianownika $\Delta=36-40=-4<0$. Obliczamy pochodną mianownika

$$(2x^2+6x+5)'=4x+6.$$

Dzieląc licznik przez pochodną mianownika otrzymujemy

$$x+1\equiv\tfrac{1}{4}(4x+6)-\tfrac{1}{2},$$

a więc

$$I=\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5}\,dx=\int \frac{\frac{1}{4}(4x+6)-\frac{1}{2}}{2x^2+6x+5}\,dx.$$

Całkę rozbijemy na sumę dwóch całek i wynosimy czynniki stałe przed całkę

$$I=\frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}\,dx-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}.$$

Obliczamy kolejno obie całki. W pierwszej z nich licznik jest pochodną mianownika, czyli jest to całka typu (16.2.2). W danym przypadku mianownik jest stale dodatni, więc

$$\int \frac{(4x+6)\,dx}{2x^2+6x+5}=\ln(2x^2+6x+5)+C.$$

Druga całka jest typu rozwiązanego w zadaniu 16.12. Obliczymy ją analogicznie

$$\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}}.$$

Wykonujemy podstawienie

$$x+\tfrac{3}{2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}}\,t, \quad \text{skąd} \quad dx=\tfrac{1}{2}dt.$$

Podstawiając otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}=\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}dt}{\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}}=\int \frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=\operatorname{arctg} 2(x+\tfrac{3}{2})+C=\operatorname{arctg}(2x+3)+C.$$

Wracając do danej całki mamy ostatecznie

$$\int \frac{x+1}{2x^2+6x+5}=\tfrac{1}{4}\ln(2x^2+6x+5)-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+3)+C.$$

W ten sposób zakończyliśmy badanie całek typu (16.2.1), rozpatrując wszystkie możliwe przypadki w zależności od znaku wyróżnika mianownika. Przechodzimy teraz do obliczania całek funkcji wymiernych, których mianowniki są wielomianami wyższego stopnia niż drugi.

ZADANIE 16.15. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}dx.$$

Rozwiązanie. Stopień licznika jest niższy niż stopień mianownika. Mianownik funkcji podcałkowej możemy przedstawić w postaci

$$(x^2-2x+1)(x^2-1)\equiv(x-1)^2(x-1)(x+1)\equiv(x-1)^3(x+1).$$

Zakładamy, że $x\neq 1$ i $x\neq -1$. Na podstawie własności funkcji wymiernych, znanych z algebry, możemy funkcję podcałkową rozłożyć na sumę następujących ułamków prostych:

$$\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}\equiv\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}.$$

Mnożąc obie strony równości przez wspólny mianownik otrzymujemy

(1) $$3x^3-5x^2+8x\equiv A(x+1)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)(x-1)^2+D(x-1)^3.$$

W miejsce x podstawiamy pierwiastki mianownika; gdy $x=1$, mamy $3-5+8=A\cdot 2$, skąd $A=3$, a gdy $x=-1$, mamy $-3-5-8=D\cdot(-8)$, skąd $D=2$.

Aby obliczyć pozostałe współczynniki B i C, musimy jeszcze znaleźć dwa równania. Możemy więc np. porównać współczynniki przy x^3 po obu stronach tożsamości (1):

$$3=C+D,$$

skąd podstawiając $D=2$ otrzymujemy $C=1$; możemy też porównać wyrazy wolne

$$0=A-B+C-D, \quad \text{skąd} \quad B=2.$$

Możemy więc przedstawić funkcję podcałkową w postaci

$$\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x-1)^3(x+1)}\equiv\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}.$$

Całkujemy obie strony, wynosimy stałe czynniki przed całki i wprowadzamy potęgi o wykładnikach ujemnych

$$I=3\int(x-1)^{-3}dx+2\int(x-1)^{-2}dx+\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x+1}.$$

Stosujemy wzory otrzymane w zadaniu 16.12; mamy

$$I=3\frac{(x-1)^{-2}}{-2}+2\frac{(x-1)^{-1}}{-1}+\ln|x-1|+2\ln|x+1|+C,$$

skąd ostatecznie

$$\int\frac{3x^3-5x^2+8x}{(x^2-2x+1)(x^2-1)}dx=\frac{-3}{2(x-1)^2}-\frac{2}{x-1}+\ln|x-1|+2\ln|x+1|+C.$$

Zadanie 16.16. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}\,dx\,.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x\neq 1$ i $x\neq -1$. Jak widzimy, licznik funkcji podcałkowej jest wyższego stopnia niż mianownik, wobec czego dzielimy licznik przez mianownik. Dzielenie daje iloraz $x+1$ oraz resztę $3x^3+x^2+x-1$, a więc

$$\frac{x^5+x^4+3x^3+x^2-2}{x^4-1}\equiv x+1+\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\,.$$

Wobec tego

$$I=\int x\,dx+\int dx+\int\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\,dx\,. \tag{1}$$

Pierwszą i drugą całkę obliczamy od razu:

$$\int x\,dx=\tfrac{1}{2}x^2\,,\qquad \int dx=x\,.$$

W trzeciej całce rozkładamy mianownik na czynniki

$$x^4-1\equiv(x^2-1)(x^2+1)\equiv(x-1)(x+1)(x^2+1)\,.$$

Funkcję podcałkową rozkładamy na sumę ułamków prostych

$$\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\,.$$

Uwaga. Jeżeli w mianowniku ułamka prostego znajduje się wyrażenie stopnia pierwszego lub jego potęga, to w liczniku piszemy stałą; jeżeli w mianowniku jest wyrażenie nieprzywiedlne stopnia drugiego lub jego potęga, to w liczniku piszemy dwumian stopnia pierwszego.

Mnożymy obie strony tożsamości przez wspólny mianownik

$$3x^3+x^2+x-1\equiv A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1)\,.$$

W miejsce x podstawiamy kolejno pierwiastki mianownika; dla $x=1$ mamy $3+1+1-1=$ $=A\cdot 2\cdot 2$, skąd $A=1$, a dla $x=-1$ mamy $-3+1-1-1=B\cdot(-2)\cdot 2$, skąd $B=1$.

Chcąc znaleźć pozostałe współczynniki C i D przyrównujemy współczynniki przy x^3 oraz wyrazy wolne. Współczynniki przy x^3 dają

$$3=A+B+C\,,\quad \text{skąd}\quad C=1\,;$$

wyrazy wolne dają

$$-1=A-B-D\,,\quad \text{skąd}\quad D=1\,.$$

A więc

$$\frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\equiv\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}\,.$$

Całkujemy

$$(2) \qquad \int \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx .$$

Obliczamy poszczególne całki. Mamy

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| , \qquad \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| .$$

Trzecią całkę rozkładamy na sumę dwóch całek

$$(3) \qquad \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$$

Pierwsza z całek po prawej stronie została obliczona w zadaniu 15.21:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) .$$

Drugą całkę w równości (3) otrzymujemy bezpośrednio ze wzoru (15.2.10):

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x .$$

Wracając do równości (3) mamy

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x .$$

Na podstawie równości (2) otrzymujemy

$$\int \frac{3x^3+x^2+x-1}{x^4-1}\,dx = \ln|x-1| + \ln|x+1| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x .$$

Ostatecznie, na podstawie równości (1), mamy

$$\int \frac{x^5+x^4+3x^3-x^2-2}{x^4-1}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + x + \ln|x^2-1| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C .$$

ZADANIE 16.17. Obliczyć całkę

$$\int \frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4}\,dx .$$

Rozwiązanie. W mianowniku mamy trójmian dwukwadratowy. Traktując x^2 jako nową zmienną u obliczamy wyróżnik $\Delta = 25-16 = 9 > 0$ i pierwiastki $+1$ i $+4$; rozkładamy trójmian na czynniki na podstawie wzoru iloczynowego trójmianu:

$$x^4-5x^2+4 \equiv (x^2-1)(x^2-4) \equiv (x-1)(x+1)(x-2)(x+2) .$$

Zakładamy, że $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq 2$, $x \neq -2$. Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych

$$(1) \qquad \frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}.$$

Mnożąc obie strony tożsamości przez wspólny mianownik otrzymujemy

$$4x^3+x^2-4x-4 \equiv A(x+1)(x-2)(x+2)+$$
$$+B(x-1)(x-2)(x+2)+C(x-1)(x+1)(x+2)+D(x-1)(x+1)(x-2).$$

W miejsce x podstawiamy kolejno pierwiastki mianownika. Gdy $x=1$, mamy $4+1-4-4=$ $=A(1+1)(1-2)(1+2)$, skąd $-3=-6A$, czyli $A=\frac{1}{2}$; gdy $x=-1$, mamy $-4+1+4-4=$ $=B(-2)(-3)\cdot 1$, skąd $B=-\frac{1}{2}$; gdy $x=2$, mamy $4\cdot 8+4-8-4=C\cdot 3\cdot 4$, skąd $C=2$; gdy $x=-2$, mamy $4\cdot(-8)+4+8-4=D(-3)(-1)(-4)$, skąd $D=2$. Równość (1) przyjmuje więc postać

$$\frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4} \equiv \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}.$$

Całkujemy

$$\int \frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln|x-1| - \tfrac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C,$$

lub krócej:

$$\int \frac{4x^3+x^2-4x-4}{x^4-5x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\ln|x^2-4| + C.$$

Zadanie 16.18. Obliczyć całkę

$$I = \int \frac{x^4+2x^3+5x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx.$$

Rozwiązanie. Stopień licznika równa się stopniowi mianownika, a więc dzielimy licznik przez mianownik. Po podzieleniu otrzymujemy

$$\frac{x^4+2x^3+5x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2} \equiv 1 + \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2}.$$

A więc

$$(1) \qquad I = x + \int \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2}\,dx.$$

W ostatniej całce mianownik jest trójmianem dwukwadratowym. Ponieważ wyróżnik $\Delta=9-8=1>0$, postępujemy jak w poprzednim zadaniu i otrzymujemy

$$x^4+3x^2+2 \equiv (x^2+1)(x^2+2).$$

Opierając się na tym przekształceniu rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

$$\frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2},$$

skąd

$$2x^3+2x^2+4x \equiv (Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+1)\,.$$

Przyrównując współczynniki po obu stronach tożsamości musielibyśmy rozwiązać układ czterech równań z czteroma niewiadomymi. Zamiast tego podstawimy w miejsce x urojone pierwiastki mianownika. Gdy $x=i$, mamy $-2i-2+4i=(Ai+B)\cdot 1$, skąd $A=2$, $B=-2$ (albowiem dwie liczby zespolone są równe, jeżeli ich części rzeczywiste są równe i części urojone są równe); gdy $x=i\sqrt{2}$, mamy $-4\sqrt{2}i-4+4\sqrt{2}i=(C\sqrt{2}i+D)(-1)$, skąd $C=0$, $D=4$. A więc

$$\frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2} \equiv \frac{2x-2}{x^2+1}+\frac{4}{x^2+2}\,.$$

Całkujemy

$$\int \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} + 4\int \frac{dx}{x^2+2}$$

Obliczamy kolejno całki:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)\,, \qquad \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\,, \qquad \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$$

(por. zad. 16.11). Na podstawie równości (1) otrzymujemy ostatecznie

$$\int \frac{x^4+2x^3+5x^2+4x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = x+\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg} x+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C\,.$$

ZADANIE 16.19. Obliczyć całkę

$$\int \frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie. Widzimy, że $x^2-2x+1=(x-1)^2$, natomiast trójmian x^2+2x+5 ma wyróżnik $\Delta=4-20<0$, a więc nie da się rozłożyć na czynniki. Otrzymujemy

$$(x^2-2x+1)(x^2+2x+5) \equiv (x-1)^2(x^2+2x+5)\,.$$

Zakładamy, że $x \neq 1$. Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

$$\frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)} \equiv \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+5}\,.$$

Mnożenie obu stron równości przez wspólny mianownik daje

$$x^2-2x-7 \equiv A(x^2+2x+5)+B(x-1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)^2.$$

Przyjmując $x=1$ znajdujemy $A=-1$. Wstawiając obliczoną wartość A otrzymujemy

$$x^2-2x-7 \equiv -x^2-2x-5+B(x-1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)^2\,,$$

czyli

$$2(x-1)(x+1) \equiv B(x-1)(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)^2\,.$$

Dzielimy obie strony tożsamości przez $x-1$ i otrzymujemy

(1) $$2(x+1) \equiv B(x^2+2x+5)+(Cx+D)(x-1)\,.$$

Przyjmujemy znowu $x=1$ i otrzymujemy $B=\frac{1}{2}$. Przyrównujemy teraz w tożsamości (1) współczynniki przy x^2 i otrzymujemy $0=B+C$, skąd $C=-\frac{1}{2}$. Następnie przyrównujemy wyrazy wolne, mamy $2=5B-D$, skąd $D=\frac{1}{2}$. Mamy więc

$$\frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)} \equiv \frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+2x+5}.$$

Całkujemy

$$(2) \qquad \int \frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}\,dx=-\int \frac{dx}{(x-1)^2}+\tfrac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}-\tfrac{1}{2}\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2+2x+5}.$$

Obliczamy całki:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{-1}{x-1}, \qquad \int \frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|.$$

Zostaje obliczenie całki

$$(3) \qquad \int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Jak już obliczyliśmy, wyróżnik mianownika jest ujemny. Dzielimy więc licznik przez pochodną mianownika i otrzymujemy $x-1\equiv\frac{1}{2}(2x+2)-2$. A więc

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx-2\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Pierwsza całka

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx=\ln(x^2+2x+5).$$

W drugiej całce przekształcamy mianownik

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

i wykonujemy podstawienie $x+1=\sqrt{4}t$, czyli $x+1=2t$, skąd $dx=2dt$. A więc

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\int \frac{2dt}{4t^2+4}=\tfrac{2}{4}\int \frac{dt}{t^2+1}=\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t=\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}(x+1).$$

Wracając do całki (3) mamy

$$\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}\,dx=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)-\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}(x+1).$$

Ostatecznie na podstawie równości (2) otrzymujemy

$$\int \frac{x^2-2x-7}{(x^2-2x+1)(x^2+2x+5)}\,dx=\frac{1}{x-1}+\tfrac{1}{2}\ln|x-1|-\tfrac{1}{4}\ln(x^2+2x+5)+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\tfrac{1}{2}(x+1)+C.$$

Zadanie 16.20. Obliczyć całkę

$$\int \frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9}\,dx.$$

Rozwiązanie. Mianownik jest trójmianem dwukwadratowym o wyróżniku ujemnym, nie możemy go więc rozłożyć metodą podaną w zadaniach 16.17 i 16.18. Możemy natomiast rozłożyć go wtedy na czynniki stopnia drugiego w następujący sposób:

$$x^4+2x^2+9\equiv(x^2+3)^2-4x^2\equiv(x^2+3+2x)(x^2+3-2x)\equiv(x^2+2x+3)(x^2-2x+3).$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste

$$\frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9}\equiv\frac{Ax+B}{x^2+2x+3}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+3}.$$

Mnożąc obie strony równości przez wspólny mianownik otrzymujemy

$$2x^3-x^2+4x-3\equiv$$

$$\equiv(Ax+B)(x^2-2x+3)+(Cx+D)(x^2+2x+3)\equiv$$

$$\equiv(A+C)x^3+(-2A+B+2C+D)x^2+(3A-2B+3C+2D)x+(3B+3D).$$

Stąd otrzymujemy układ równań

$$A+C=2,\quad -2A+B+2C+D=-1,\quad 3A-2B+3C+2D=4,\quad 3B+3D=-3.$$

Rozwiązanie tego układu daje $A=1$, $B=0$, $C=1$, $D=-1$. A więc

$$\frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9}\equiv\frac{x}{x^2+2x+3}+\frac{x-1}{x^2-2x+3}.$$

Całkujemy

(1) $$\int \frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9}\,dx=\int\frac{x\,dx}{x^2+2x+3}+\int\frac{x-1}{x^2-2x+3}\,dx.$$

W pierwszej całce dzielimy licznik przez pochodną $2x+2$ mianownika i otrzymujemy $x\equiv\frac{1}{2}(2x+2)-1$. A więc

(2) $$\int\frac{x\,dx}{x^2+2x+3}\equiv\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx-\int\frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

Postępując dalej jak w zadaniu 16.14 otrzymujemy

(3) $$\int\frac{x\,dx}{x^2+2x+3}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

Obliczamy teraz drugą całkę w równości (1):

(4) $$\int\frac{x-1}{x^2-2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3).$$

Podstawiając wartości (3) i (4) do (1) mamy ostatecznie

$$\int \frac{2x^3-x^2+4x-3}{x^4+2x^2+9}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + \tfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+3) + C =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln(x^4+2x^2+9) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

ZADANIE 16.21. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} \quad (n \text{ liczba naturalna}).$$

Rozwiązanie Będziemy szukali tzw. *wzoru redukcyjnego* (lub *rekurencyjnego*), na podstawie którego wyrazimy daną całkę przez całkę o niższej potędze w mianowniku. W tym celu robimy następujące przekształcenie:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}\,dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n}.$$

Jeżeli więc oznaczymy krótko $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, to otrzymamy wzór

(1) $$I_n = I_{n-1} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n}.$$

Weźmy pod uwagę drugą całkę

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n} = \int x \cdot \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}$$

i zastosujmy wzór na całkowanie przez części; mamy

$$u=x,\ dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^n}, \quad \text{skąd} \quad du=dx,\ v=\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$$

(por. zad. 15.8). Mamy więc

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^n} = \frac{-x}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{dx}{(2n-2)(x^2+1)^{n-1}} =$$

$$= \frac{-1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}I_{n-1}.$$

Podstawiając ten wynik do równości (1) otrzymujemy

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2}I_{n-1}.$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór rekurencyjny

$$(16.2.4)\qquad I_n=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1},\quad \text{gdzie}\quad I_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

ZADANIE 10.22. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}.$$

Rozwiązanie. Zastosujemy metodę podaną w poprzednim zadaniu. Szukaną całkę oznaczamy przez I_4. Według wzoru (16.2.4) wyprowadzonego w poprzednim zadaniu mamy

$$I_4=\tfrac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3}+\tfrac{5}{6}I_3$$

i dalej na podstawie tego samego wzoru obliczamy kolejno:

$$I_3=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\tfrac{3}{4}I_2,\qquad I_2=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\tfrac{1}{2}I_1.$$

Mamy oczywiście

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x.$$

Cofając się otrzymujemy kolejno:

$$I_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x,$$

$$I_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x,$$

$$I_4=\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\operatorname{arctg}x+C.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^3}+\frac{5}{24}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}+\frac{5}{16}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}x+C.$$

ZADANIE 16.23. Obliczyć całkę

$$\int\frac{dx}{(x^2-4x+13)^2}.$$

Rozwiązanie. Stwierdzamy, że wyróżnik mianownika jest ujemny: $\Delta=16-52<0$. Sprowadzamy mianownik funkcji podcałkowej do postaci kanonicznej

$$\int\frac{dx}{((x-2)^2+9)^2}.$$

Wykonujemy podstawienie $x-2=\sqrt{9}t$, skąd $dx=3dt$. Podstawiając mamy

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^2}=\int \frac{3dt}{(9t^2+9)^2}=\frac{3}{9^2}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}=\frac{1}{27}I_2 .$$

Opierając się na zadaniu 16.22 piszemy

$$I_2=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg} t=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{x-2}{3}}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}=\tfrac{3}{2}\cdot\frac{x-2}{x^2-4x+13}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}.$$

Ostatecznie więc mamy

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^2}=\tfrac{1}{27}\left(\tfrac{3}{2}\cdot\frac{x-2}{x^2-4x+13}+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}\right)+C=$$

$$=\tfrac{1}{18}\cdot\frac{x-2}{x^2-4x+13}+\tfrac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C .$$

ZADANIE 16.24. Obliczyć całkę

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2)^3} .$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x\neq 0$. Rozszerzamy funkcję podcałkową mnożąc licznik i mianownik przez x:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2(x^2+2)^3}$$

i wykonujemy podstawienie $x^2=t$; wtedy $t>0$, a różniczkowanie daje $x\,dx=\frac{1}{2}dt$. Otrzymujemy więc

$$\int \frac{dx}{x(x^2+2)^3}=\tfrac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+2)^3} .$$

Funkcję podcałkową rozkładamy na sumę ułamków prostych

$$(1)\qquad \frac{1}{t(t+2)^3}\equiv\frac{A}{t}+\frac{B}{(t+2)^3}+\frac{C}{(t+2)^2}+\frac{D}{t+2},$$

skąd otrzymujemy

$$1\equiv A(t+2)^3+Bt+Ct(t+2)+Dt(t+2)^2 .$$

W miejsce t podstawiamy kolejno pierwiastki mianownika; gdy $t=0$, to $A=\frac{1}{8}$, a gdy $t=-2$, to $B=-\frac{1}{2}$. Mamy więc

$$1\equiv\tfrac{1}{8}(t^3+6t^2+12t+8)-\tfrac{1}{2}t+Ct(t+2)+Dt(t+2)^2 .$$

Po przeniesieniu wyrazów o współczynnikach liczbowych na lewą stronę otrzymujemy

$$-\tfrac{1}{8}t^3-\tfrac{3}{4}t^2-t\equiv Ct(t+2)+Dt(t+2)^2 .$$

Widzimy, że prawa strona tożsamości dzieli się przez $t(t+2)$, a więc lewa strona musi dzielić się przez to samo wyrażenie; po podzieleniu obu stron mamy

$$-\tfrac{1}{8}t-\tfrac{1}{2}\equiv C+D(t+2)\,,\qquad \text{czyli}\qquad -\tfrac{1}{8}t-\tfrac{1}{2}\equiv Dt+(C+2D)\,,$$

skąd porównując współczynniki otrzymujemy $D=-\frac{1}{8}$, $C=-\frac{1}{4}$.

Tożsamość (1) przyjmie teraz następującą postać:

$$\frac{1}{t(t+2)^3}\equiv\frac{\frac{1}{8}}{t}-\frac{\frac{1}{2}}{(t+2)^3}-\frac{\frac{1}{4}}{(t+2)^2}-\frac{\frac{1}{8}}{t+2}\,.$$

Całkując otrzymujemy

$$\int\frac{dt}{t(t+2)^3}=\tfrac{1}{8}\int\frac{dt}{t}-\tfrac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+2)^3}-\tfrac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+2)^2}-\tfrac{1}{8}\int\frac{dt}{t+2}=$$

$$=\tfrac{1}{8}\ln t-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2(t+2)^2}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{-1}{t+2}-\tfrac{1}{8}\ln(t+2)=$$

$$=\tfrac{1}{8}\ln\frac{t}{t+2}+\frac{1}{4(t+2)^2}+\frac{1}{4(t+2)}\,.$$

Wracając do pierwotnej całki i podstawiając $t=x^2$ otrzymujemy

$$\int\frac{dx}{x(x^2+2)^3}=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{8}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{1}{4(x^2+2)^2}+\frac{1}{4(x^2+2)}\right)+C=$$

$$=\tfrac{1}{16}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{1}{8(x^2+2)^2}+\frac{1}{8(x^2+2)}+C\,.$$

ZADANIE 16.25. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{(x^4+2x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-x)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie. Zauważmy, że mianownik funkcji podcałkowej możemy przedstawić w postaci $x(x-1)^3(x^2+1)^2$. Zakładamy, że $x\neq 0$, $x\neq 1$, i przedstawiamy funkcję podcałkową w postaci sumy ułamków prostych

$$\frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{(x^4+2x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-x)}\equiv$$

$$\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}+\frac{Gx+H}{x^2+1}\,.$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika mamy

$$x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1=$$

$$\equiv A(x-1)^3(x^2+1)^2+Bx(x^2+1)^2+Cx(x-1)(x^2+1)^2+$$

$$+Dx(x-1)^2(x^2+1)^2+x(Ex+F)(x-1)^3+x(Gx+H)(x-1)^3(x^2+1)\,.$$

Przyjmując $x=0$ otrzymujemy $A=-1$, a przyjmując $x=1$ otrzymujemy $B=-2$. Podstawiając obliczone wartości otrzymujemy

$$x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1\equiv$$
$$\equiv -(x^3-3x^2+3x-1)(x^4+2x^2+1)-2x(x^4+2x^2+1)+Cx(x-1)(x^2+1)^2+$$
$$+Dx(x-1)^2(x^2+1)^2+x(Ex+F)(x-1)^3+x(Gx+H)(x-1)^3(x^2+1),$$

skąd po redukcji

$$x^7-2x^6+x^5+3x^4-6x^3+3x^2\equiv$$
$$\equiv Cx(x-1)(x^2+1)^2+Dx(x-1)^2(x^2+1)^2+$$
$$+x(Ex+F)(x-1)^3+x(Gx+H)(x-1)^3(x^2+1).$$

Zauważmy, że prawa strona tożsamości dzieli się przez $x(x-1)$, a więc i lewa strona musi dzielić się przez to wyrażenie; po wykonaniu dzielenia obu stron otrzymujemy

$$x^5-x^4+3x^2-3x\equiv$$
$$\equiv C(x^2+1)^2+D(x-1)(x^2+1)^2+(Ex+F)(x-1)^2+(Gx+H)(x-1)^2(x^2+1).$$

Przyjmując $x=1$ otrzymujemy $C=0$. Tożsamość przyjmuje teraz postać

$$x^5-x^4+3x^2-3x\equiv D(x-1)(x^2+1)^2+(Ex+F)(x-1)^2+(Gx+H)(x-1)^2(x^2+1).$$

Dzielimy obie strony tożsamości przez $x-1$:

$$x^4+3x\equiv D(x^2+1)^2+(Ex+F)(x-1)+(Gx+H)(x-1)(x^2+1).$$

Przyjmując $x=1$ otrzymujemy $D=1$. Podstawiając tę wartość do tożsamości otrzymujemy po redukcji

$$-2x^2+3x-1\equiv(Ex+F)(x-1)+(Gx+H)(x-1)(x^2+1).$$

Dzielimy obie strony tożsamości znowu przez $x-1$:

$$-2x+1\equiv Ex+F+(Gx+H)(x^2+1)\equiv Ex+F+Gx^3+Gx+Hx^2+H,$$

skąd $G=0$, $H=0$, $E=-2$, $F=1$.

Mamy więc

$$\frac{x^6-6x^5+10x^4-17x^3+8x^2-5x+1}{(x^4+2x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-x)}\equiv-\frac{1}{x}-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{x-1}+\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Całkując obie strony tożsamości otrzymujemy

$$I=-\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{-2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx=$$
$$=-\ln|x|+\frac{1}{(x-1)^2}+\ln|x-1|-\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$