1 Wektory - iloczyn skalarny, wektorowy, mieszany - ćwiczenia

Przykład 1

Oblicz kąt między wektorami $\overrightarrow{a} = [3, -1, 2]$ i $\overrightarrow{b} = [1, 2, 3]$.

Z definicji iloczynu skalarnego (Definicja 1) wiemy, że $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \cos\alpha$. Stąd otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}\ .$$

Liczymy iloczyn skalarny (własność 5) oraz długości wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$:
$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = [3, -1, 2] \circ [1, 2, 3] = 3 - 2 + 6 = 7, \quad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14},$
$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ i wstawiamy do wzoru:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{7}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{1}{2}\ . \quad \text{Odpowiedź:} \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Przykład 2

Na płaszczyźnie XOZ wyznacz punkt P, tak aby wektor $\overrightarrow{AP}$ był prostopadły do wektora $\overrightarrow{AB}$ i miał długość 3, gdzie $A = (-1, 1, 0), B = (-1, -1, -1)$.

Oznaczmy współrzędne punktu $P = (x, y, z)$. Punkt P leży na płaszczyźnie XOZ, a więc $y = 0$. Ponadto, z własności iloczynu skalarnego (własność 4) wiemy, że $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB} = 0$.

Otrzymujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB} = 0 \\ |\overrightarrow{AP}| = 3 \end{cases}$$

Ale mamy: $\overrightarrow{AP} = [x + 1, -1, z], \quad \overrightarrow{AB} = [0, -2, -1], \quad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x + 1)^2 + (-1)^2 + z^2}$ i
$\overrightarrow{AP} \circ \overrightarrow{AB} = 2 - z$, więc układ warunków przyjmuje postać:

$$\begin{cases} 2 - z = 0 \\ (x + 1)^2 + (-1)^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Po wstawieniu $z = 2$ do drugiego równania otrzymujemy $x = 1$ lub $x = -3$. Odpowiedź: są dwa takie punkty: $P = (1, 0, 2)$ lub $P = (-3, 0, 2)$.

Przykład 3

Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$, $C = (0, 4, 0)$.

Z uwagi po Definicji 3 wynika, że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ jest równe długości wektora $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, zatem pole trójkąta ABC jest równe połowie pola tego równoległoboku. Mamy: $\overrightarrow{AB} = [-1, -3, -1]$, $\overrightarrow{AC} = [-1, 2, -3]$ oraz

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{k} + \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{i} = [11, -2, -5].$$

Stąd $P = \frac{1}{2}\sqrt{11^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$.

Przykład 4

Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$.

Wektory $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ to wersory osi układu współrzędnych, tzn. $\overrightarrow{i} = [1, 0, 0]$, $\overrightarrow{j} = [0, 1, 0]$, $\overrightarrow{k} = [0, 0, 1]$, a więc $\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = [3, 2, 1]$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} = [1, -1, 2]$ oraz

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{k} + \overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} + \overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} = [5, -5, -5].$$

Pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ jest równe długości wektora $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, czyli $P = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3}$.

Przykład 5

Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $R = (-1, 1, 0)$, $S = (0, 0, 1)$.

Z uwagi po Definicji 3 wynika, że objętość czworościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{PQ}$ jest równa jednej szóstej wartości bezwzględnej z iloczynu mieszanego tych wektorów, tzn.
$V = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ})|$. Mamy: $\overrightarrow{PS} = [-1, -1, 0]$, $\overrightarrow{PR} = [-2, 0, -1]$, $\overrightarrow{PQ} = [0, 1, 2]$ oraz

$$(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5.$$

A zatem $V = \frac{1}{6}\,|-5| = \frac{5}{6}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Oblicz iloczyn skalarny $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}$, jeśli $\overrightarrow{a} = [-1, 2, -3]$, $\overrightarrow{b} = [2, 0, -1]$.

2. Dla jakiej wartości parametru p wektory $\overrightarrow{a} = [p, 1, 1]$ i $\overrightarrow{b} = [2p, p, -1]$ są prostopadłe.

3. Znaleźć wektor $\overrightarrow{a}$ o długości 1, który z wektorami $\overrightarrow{b} = [1, 0, 0]$ i $\overrightarrow{c} = [1, \sqrt{3}, 0]$ tworzy kąt $\frac{\pi}{3}$.

4. Na płaszczyźnie XOY znaleźć wektor $\overrightarrow{p}$ prostopadły do wektora $\overrightarrow{a} = [4, 3, -5]$ i mający długość wektora $\overrightarrow{a}$.

5. Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{a} = [0, 3, -2]$, $\overrightarrow{b} = [-1, 2, 5]$.

6. Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{a} = [1, -1, 2]$, $\overrightarrow{b} = [0, 3, -2]$, $\overrightarrow{c} = [-1, 5, 0]$.

Odpowiedzi. 1. 1; 2. -1 lub $\frac{1}{2}$; 3. $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$ lub $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}]$; 4. $[3\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, 0]$ lub $[-3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 0]$ 5. $\sqrt{374}$; 6. 14.