Szeregi potęgowe - ćwiczenia

Zadanie 1. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność podanych szeregów.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n 3^{n+1}}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(3n)!}$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{50^n}{n!}$

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sin\frac{\pi}{2^n}}$

Rozwiązanie przykładu (f):

Przypomnijmy, że $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Przyjmijmy, że

$$a_n = \frac{n^4}{(3n)!}, \qquad \text{wtedy} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{(3(n+1))!} = \frac{(n+1)^4}{(3n+3)!}.$$

Skorzystamy z kryterium d'Alemberta. Wyrazy ciągu a_n są dodatnie. Obliczmy

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4(3n)!}{n^4(3n)!(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 0.$$

Ponieważ $g < 0$ zatem rozważany szereg jest zbieżny.

Rozwiązanie przykładu (l):

Przyjmijmy, że

$$a_n = \frac{n^2}{\sin\frac{\pi}{2^n}}, \qquad \text{wtedy} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}.$$

Skorzystamy z kryterium d'Alemberta. Wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie. Obliczmy

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} == \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}.$$

Korzystamy z faktu, że $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, przyjmując $x = \pi/2^n$ lub $x = \pi/2^{n+1}$. Stąd mamy $g = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} < 1$. Zatem, rozważany szereg jest zbieżny.

Zadanie 2. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność podanych szeregów.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{2n}}{(3n^3+1)^n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+6^{2n}}{7^n+8^n}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n^{2n}}{(3n+1)^{2n}}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{5}\right)^n$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(n!)^n 10^n}$

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$

Rozwiązanie przykładu (e):

Przyjmijmy, że
$$a_n = \frac{4^n \cdot n^{2n}}{(3n+1)^{2n}}.$$
Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego. Wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie. Obliczmy
$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n \cdot n^{2n}}{(3n+1)^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\sqrt[n]{n^{2n}}}{\sqrt[n]{(3n+1)^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{(3n+1)^2} = \frac{4}{9} < 1.$$
Zatem rozważany szereg jest zbieżny.

Rozwiązanie przykładu (h):

Przyjmijmy, że $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie. Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego. Obliczmy
$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1.$$
Zatem rozważany szereg jest zbieżny.

Zadanie 3. Korzystając z Wniosku 1 z kryterium porównawczego zbadać zbieżność podanych szeregów.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}\right)$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+2} - n\right)$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+2}{2n^3-5}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{5}{n^2}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3+n-2}{2n^5-n+4}$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-5}}{3n+5}$

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}$

Rozwiązanie przykładu (a):

Niech $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$. Przyjmujemy $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$. Są to ciągi o wyrazach dodatnich. Szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$
jest zbieżny jako szereg harmoniczny rzędu $p = \frac{3}{2} > 1$ (por. Twierdzenie 2 z wykładu). Liczymy
$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} = 1 < \infty.$$
Ponieważ otrzymaliśmy liczbę skończoną oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, zatem na mocy kryterium porównawczego (Wniosku 1) rozważany szereg jest zbieżny.

Rozwiązanie przykładu (b):

Niech $a_n = \sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n}$. Skorzystamy ze wzoru $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Możemy go zapisać w postaci

$$a - b = \tfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2},$$

zatem

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[3]{n^3-n} = \frac{n^3+n-(n^3-n)}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2}+\sqrt[3]{(n^3+n)(n^3-n)}+\sqrt[3]{(n^3-n)^2}} = \frac{2n}{\sqrt[3]{n^6+2n^4+n^2}+\sqrt[3]{n^6-n^2}+\sqrt[3]{n^6-2n^4+n^2}}.$$

Dobierzmy $b_n = \frac{1}{n}$. Ciągi (a_n) i (b_n) są ciągami o wyrazach dodatnich. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny. Liczymy

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{\sqrt[3]{n^6+2n^4+n^2}+\sqrt[3]{n^6-n^2}+\sqrt[3]{n^6-2n^4+n^2}}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right)} = \frac{2}{3} < \infty.$$

Ponieważ otrzymaliśmy liczbę skończoną oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, zatem na mocy kryterium porównawczego (Wniosku 1) rozważany szereg jest rozbieżny.

Zadanie 4. **Korzystając z kryterium Leibniza zbadać zbieżność podanych szeregów.**

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n+4}}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3-2}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{4^n}$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n+2}$

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$

Rozwiązanie przykładu (h):

Jest to szereg naprzemienny. Ponieważ $\frac{1}{n}$ jest funkcją malejącą, więc ciąg $a_n = \sqrt[n]{3} - 1 = 3^{\frac{1}{n}} - 1$ jest malejący. Korzystając z faktu, że $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$, obliczamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{3} - 1) = 0$. Na mocy kryterium Leibniza rozważany szereg jest zbieżny.