# 1 Całka powierzchniowa

**Płatem powierzchniowym gładkim** nazywamy obraz zbioru domkniętego $D$, którego brzegiem jest krzywa kawałkami gładka, przy odworowaniu

$$\Phi : x = x(u,v)\ ,\ y = y(u,v)\ ,\ z = z(u,v)\ ,$$

jeśli

1. funkcje $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ są ciągłe wewnątrz i na brzegu zbioru $D$ oraz mają ciągłe i ograniczone pochodne cząstkowe wewnątrz zbioru $D$,

2. odwzorowanie $\Phi$ jest różnowartościowe w $D$,

3. wyznaczniki
$$A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \quad , \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} \quad , \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$
spełniają warunek $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Przy tych założeniach płat $S = \Phi(D)$ ma w każdym punkcie $(x_0, y_0, z_0) \in S$ płaszczyznę styczną. Układ funkcji $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ nazywamy **parametryzacją płata** $S$.

Szczególnym przypadkiem płata powierzchniowego gładkiego jest płat $S$ postaci $S = \Phi(D)$, gdzie $\Phi : x = u\ ,\ y = v\ ,\ z = f(u,v)\ ,\ (u,v) \in D$, czyli $z = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in D$. Płat, który można podzielić na skończoną ilość płatów gładkich nazywamy **płatem kawałkami gładkim**.

**Przykład.** Płat postaci $x^2 + y^2 = R^2$, $z \in [0, H]$, lub równoważnie, $x = R\cos u\ ,\ y = R\sin u\ ,\ z = v$, $(u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, H]$ jest fragmentem powierzchni walcowej (walcem o promieniu podstawy $R$ i wysokości $H$).

**Przykład.** Płat postaci $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $z \in [0, H]$, lub równoważnie, $x = v\cos u\ ,\ y = v\sin u\ ,\ z = kv$, $(u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, H/k]$ jest fragmentem powierzchni stożkowej (stożkiem o promieniu podstawy $R$ i wysokości $H$).

Płat powierzchniowy gładki jest powierzchnią dwustronną. Jeśli wyróżnimy na nim stronę dodatnią i stronę ujemną, to płat nazywamy **płatem powierzchniowym zorientowanym**. Jeśli płat powierzchniowy jest zamknięty (np. kula lub powierzchnia walcowa ograniczona dwiema płaszczyznami), to przyjmujemy, że stroną dodatnią jest strona zewnętrzna. Płat zorientowany dodatnio oznaczamy symbolem $S^+$, zaś płat zorientowany ujemnie - symbolem $S^-$. Ponadto, symbol $-S$ oznacza płat zorientowany przeciwnie do $S$.

**Uwaga** Wiemy, że płat $S$ jest obrazem zbioru $D$ przy owzorowaniu $\Phi$. Z drugiej strony, $D$ jest rzutem prostopadłym płata $S$ na płaszczyznę $xOy$.

## 1.1 Całka powierzchniowa niezorientowana

Niech na płacie powierzchniowym gładkim $z = f(x, y)$ , $(x, y) \in D$ będzie określona funkcja $F(x, y, z)$.

Zbiór $D$ dzielimy na zbiory regularne $D_1, \ldots, D_n$ o rozłącznych wnętrzach. Podział ten oznaczamy symbolem $\mathcal{P}$. Przez $\delta_n$ oznaczamy średnicę podziału $\mathcal{P}$, tj. największą spośród liczb $d_k$, gdzie $d_k$ oznacza największą długość odcinka zawartego w zbiorze $D_k$. Podział zbioru $D$ wyznacza podział płata $S$ na części $S_1, \ldots, S_n$. Na każdym ze zbiorów $S_k$ wybieramy dowolny punkt $P_k^*(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$. Tworzymy sumę

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \cdot |S_k| \ , \tag{1}$$

gdzie $|S_k|$ oznacza pole płata $S_k$.

**Definicja 1** *Jeśli istnieje granica przy $n \to \infty$ ciągu $(\sigma_n)$ odpowiadająca ciągowi podziałów zbioru $D$, o ile $\lim_{n\to\infty} \delta_n$, i jest niezależna od podziału i wyboru punktów $P_k^*$, to granicę tę nazywamy* **całką powierzchniową niezorientowaną** *z $F$ po płacie $S$ i oznaczamy ją symbolem $\iint_S F(x, y, z)ds$.*

**Twierdzenie 1** *Jeśli funkcja $F$ jest ciągła na płacie gładkim $S$: $z = f(x, y)$ , $(x, y) \in D$, to istnieje całka $\iint_S F(x, y, z)ds$ i wyraża się wzorem*

$$\iint\limits_S F(x, y, z)ds = \iint\limits_D F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\ dxdy \ .$$

**Przykład.** Oblicz $\iint_S z^2 ds$, gdzie $S$ jest powierzchnią stożkową $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ odciętą przez płaszczyzny $z = 1$ i $z = 2$.

Z przecięcia powierzchni stożkowej płaszczyznami $z = 1$ i $z = 2$ otrzymujemy dwa okręgi $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 4$; w tym celu wystarczy rozwiązać dwa układy równań

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 \end{cases} \ .$$

Zatem zbiór $D$ będący rzutem płata $S$ na płaszczyznę $xOy$ jest pierścieniem kołowym o promieniach 1 i 2 i środku w początku układu współrzędnych płaszczyzny $xOy$. Ostatecznie, płat $S$ jest dany równaniem $z = f(x, y)$, gdzie $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, zaś $D$ zbiorem opisanym powyżej. Funkcja $F$ jest postaci $F(x, y, z) = z^2$.

Mamy więc

$$f_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad f_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad F(x, y, f(x, y)) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2 \ .$$

Z Twierdzenia 1,

$$\iint\limits_S z^2 ds = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_D (x^2 + y^2)\ dxdy \ ,$$

a po przejściu do współrzędnych biegunowych ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \in [1, 2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$),

$$\iint\limits_S z^2 ds = \sqrt{2}\iint\limits_\Delta r^2 \cdot r dr d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 r^3\ dr\right)\ d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4}r^4\Big|_1^2\ d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \tfrac{15}{4}\ d\varphi = \tfrac{15\pi\sqrt{2}}{2} \ .$$

Twierdzenie 1 można zastąpić twierdzeniem bardziej ogólnym, dotyczącym płatów danych równaniem parametrycznym.

**Twierdzenie 2** *Jeśli funkcja $F$ jest ciągła na płacie gładkim $S = \Phi(D)$, gdzie $\Phi : x = x(u,v)$ , $y = y(u,v)$ , $z = z(u,v)$ , $(u,v) \in D$, to istnieje całka $\iint_S F(x,y,z)ds$ i wyraża się wzorem*

$$\iint\limits_S F(x,y,z)ds = \iint\limits_D F(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ dudv\ ,$$

*gdzie*

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix} \quad , \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix} \quad , \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\ .$$

**Przykład.** Oblicz $\iint_S z^2 ds$, gdzie $S = \Phi(D)$, $\Phi :\ x = v\cos u$ , $y = v\sin u$ , $z = v$, $(u,v) \in [0,2\pi] \times [1,2]$.

Mamy

$$A = \begin{vmatrix} v\cos u & \sin u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v\cos u \quad , \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -v\sin u & \cos u \end{vmatrix} = v\sin u \quad , \quad C = \begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u \end{vmatrix} = -v\ .$$

Stąd

$$\iint\limits_S z^2\ ds = \iint\limits_D v^2\sqrt{v^2\cos^2 u + v^2\sin^2 u + v^2}\ dudv =$$

$$\iint\limits_D v^2 \cdot v\sqrt{2}\ dudv = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 v^3\ dv\right)\ du = \tfrac{15\pi\sqrt{2}}{2}\ .$$

Otrzymany wynik jest identyczny jak w poprzednim przykładzie gdyż w obu przypadkach liczona byłą ta sama całka po tym samym płacie, z tym że w pierwszym przypadku płat dany był równaniem funkcyjnym, a w drugim - równaniem parametrycznym.

**Wniosek 1** *Pole powierzchni płata gładkiego $S$ wyraża się wzorem*

$$|S| = \iint\limits_S 1\ ds\ .$$

**Przykład.** Oblicz pole czaszy kuli o promieniu $R$, tj. części sfery $x^2+y^2+z^2 = R^2$ leżącej nad płaszczyzną $z = h$.

Płat $S$ dany jest równaniem $z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $(x,y) \in D$, gdzie $D$ jest rzutem płata $S$ na płaszczyznę $xOy$. Z opisu zbioru $S$ wynika, że rzutem $S$ jest koło o takim samym promieniu jak promień okręgu powstałego z przecięcia $S$ i $xOy$. Mamy

$$f'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \quad , \quad f'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

oraz

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ z = h \end{cases} \qquad \text{więc} \qquad D : x^2+y^2 \leqslant R^2-h^2\ .$$

Zatem

$$|S| = \iint\limits_S 1\ ds = \iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\ dxdy = \iint\limits_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\ dxdy\ .$$

Po przejściu do współrzędnych biegunowych ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \in [0,\sqrt{R^2-h^2}]$, $\varphi \in [0,2\pi]$),

$$|S| = \iint\limits_\Delta \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} \cdot rdrd\varphi = \int_0^{\sqrt{R^2-h^2}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{rR}{\sqrt{R^2-r^2}}\ d\varphi\right)\ dr =$$

$$\int_0^{\sqrt{R^2-h^2}}\frac{2\pi rR}{\sqrt{R^2-r^2}}\ dr = -2\pi R\sqrt{R^2-r^2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-h^2}} = -2\pi R(h-R) = 2\pi R(R-h)\ .$$

Zwróćmy uwagę, że gdy $h = 0$, to otrzymujemy wzór na pole górnej półsfery $|S| = 2\pi R^2$.