0.1 Całka powierzchniowa zorientowana

Niech S będzie gładkim płatem powierzchniowym zorientowanym i niech na płacie S określone będą funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. W każdym punkcie płata S istnieje płaszczyzna styczna. Wektor normalny tej płaszczyzny nazywamy wektorem normalnym płata S.

Definicja 1 *Całkę postaci*

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \equiv \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds$$

nazywamy **całką powierzchniową zorientowaną** *(z wyrażenia $Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$) po płacie S. Kąty α, β, γ są kątami, które wektor normalny $\overrightarrow{n}$ płata S zorientowany od strony ujemnej do strony dodatniej tworzy odpowiednio z osiami Ox, Oy, Oz.*

Własności całki powierzchniowej zorientowanej

1. $\iint_{-S} = -\iint_S$, gdzie $-S$ oznacza płat zorientowany przeciwnie do S
2. $\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$, gdzie $S = S_1 \cup S_2$

Twierdzenie 1 *Jeśli funkcje P, Q, R są ciągłe na płacie powierzchniowym gładkim zorientowanym dodatnio $S = \Phi(D)$, gdzie Φ: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, $(u,v) \in D$, a D jest zbiorem regularnym w $\mathbb{R}^2$, to istnieje całka $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ i wyraża się wzorem*

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$
$$\iint_D [P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))A + Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))B + R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))C]\, dudv\ .$$

W szczególnym przypadku, gdy płat jest dany równaniem $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, mamy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2 *Jeśli funkcje P, Q, R są ciągłe na płacie powierzchniowym gładkim zorientowanym dodatnio S danym równaniem $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, a D jest zbiorem regularnym w $\mathbb{R}^2$, to istnieje całka $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$ i wyraża się wzorem*

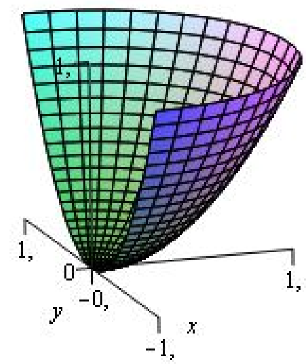
$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$
$$\iint_D \Big[P(x,y,f(x,y)) \cdot (-f'_x) + Q(x,y,f(x,y)) \cdot (-f'_y) + R(x,y,f(x,y)) \cdot 1\Big]\, dxdy\ .$$

Można sformułować analogiczne twierdzenia w przypadku gdy płat jest dany równaniem $y = f(x,z)$ lub $x = f(y,z)$.

Przykład. Oblicz $I = \iint_{S^+} zdydz + xdzdx + ydxdy$, gdzie S^+ jest częścią paraboloidy $z = x^2 + y^2$ ograniczoną płaszczyznami $x = 0$ i $z = 1$ $(x \geqslant 0)$ (patrz, rysunek poniżej).

Mamy $f(x,y) = x^2 + y^2$, skąd $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$ i z powyższego twierdzenia (wstawiając w miejsce z w funkcjach P, Q, R wyrażenie $x^2 + y^2$)

$$I = \iint_D \Big[(x^2 + y^2) \cdot (-2x) + x \cdot (-2y) + y \cdot 1\Big]\, dxdy\ ,$$



gdzie D jest rzutem prostopadłym S na płaszczyznę xOy. Zatem D jest półkolem o promieniu takim samym jak promień okręgu powstałego z przecięcia paraboloidy i płaszczyzny $z = 1$, czyli o promieniu 1. Korzystając ze współrzędnych biegunowych ($\Delta : r \in [0,1], \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$) mamy

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Delta} \left(-2r^3 \cos\varphi - 2r^2 \cos\varphi \sin\varphi + r \sin\varphi\right) r dr d\varphi \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-2r^4 \cos\varphi - 2r^3 \cos\varphi \sin\varphi + r^2 \sin\varphi\right) d\varphi \right) dr \\
&= \int_0^1 \left(-2r^4 \sin\varphi - r^3 \sin^2\varphi - r^2 \cos\varphi\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} dr \\
&= \int_0^1 -4r^4 dr = -\tfrac{4}{5} r^5 \Big|_0^1 = -\tfrac{4}{5} \ .
\end{aligned}
$$

Przykład. Oblicz $I = \iint_{S^+} (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$, gdzie S^+ jest częścią powierzchni stożkowej $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Mamy $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, skąd $f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ i wstawiając w miejsce z w funkcjach P, Q, R wyrażenie $\sqrt{x^2 + y^2}$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \left[\left(y - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot \tfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right) \cdot \tfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x - y) \cdot 1 \right] dxdy \\
&= \iint_D \left[-\tfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + x - y + \tfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + x - y \right] dxdy = \iint_D 2(x - y) dxdy
\end{aligned}
$$

gdzie D jest rzutem prostopadłym S na płaszczyznę xOy, czyli kołem $x^2 + y^2 \leqslant 4$. Korzystając ze współrzędnych biegunowych ($\Delta : r \in [0, 2], \varphi \in [0, 2\pi]$) mamy

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Delta} 2(r \cos\varphi - r \sin\varphi) r dr d\varphi \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} 2r^2 (\cos\varphi - \sin\varphi) d\varphi \right) dr = 0 \ .
\end{aligned}
$$

Przykład. Oblicz $I = \iint_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, gdzie $S^+ = \Phi(D)$, Φ: $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u$, $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Mamy

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \ .$$

Stąd, kładąc za x, y, z równania z parametryzacji płata S, otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \Big[(u+v)^2 \cdot 1 + (u-v)^2 \cdot 1 + u^2 \cdot (-2)\Big]\, dudv = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 2v^2 dv\right) du = \tfrac{2}{3} \ . \end{aligned}$$

0.2 Zastosowania całki powierzchniowej

Całkę powierzchniową niezorientowaną (podobnie jak całkę krzywoliniową nieskierowaną) można wykorzystać do obliczenia masy, momentów statycznych i momentów bezwładności płata S, przy założeniu, że funkcja podcałkowa $f(x, y, z)$ jest rozumiana jako gęstość powierzchniową masy. W konsekwencji, można obliczyć współrzędne środka ciężkości płata powierchniowego. Wszystkie wzory niezbędne do tych obliczeń można znaleźć w osobnym dokumencie pt. zastosowania całek w mechanice.

Przykładowe zastosowania całki powierzchniowej zorientowanej podane zostały poniżej.

1. Jeśli $\overrightarrow{v}(x, y, z) = [v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)]$ jest prędkością cieczy w punkcie przestrzeni $\mathbb{R}^3$, to ilość cieczy przepływająca w jednostce czasu przez płat S (ze strony ujemnej do dodatniej) można obliczyć ze wzoru
$$\iint\limits_S v_1(x, y, z) dydz + v_2(x, y, z) dzdx + v_3(x, y, z) dxdy \ .$$

2. Parcie cieczy o ciężarze właściwym c na dodatnią stronę płata zorientowanego S zanurzonego w cieczy wynosi
$$\overrightarrow{P} = c \left[\iint\limits_S z dydz, \iint\limits_S z dzdx, \iint\limits_S z dxdy\right] \ .$$

Przykład. Oblicz ilość cieczy przepływającej w jednostce czasu przez górną stronę powierzchni stożkowej $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, jeśli prędkość cieczy jest równa $\overrightarrow{v}(x, y, z) = [x, y, z]$.

Mamy $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, skąd $f'_x = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Zatem

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_S x dydz + y dzdx + z dxdy \\ &= \iint\limits_D \left[x \cdot \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y \cdot \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot 1\right] dxdy \\ &= \iint\limits_D \left[\tfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \tfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right] dxdy \\ &= \iint\limits_D \left[\tfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right] dxdy = \iint\limits_D 1 dxdy = |D| \ . \end{aligned}$$

Zbiór D jest rzutem prostopadłym S na płaszczyznę xOy, czyli kołem $x^2 + y^2 \leqslant 1$, którego pole wynosi π. Zatem ilość cieczy przepływającej w jednostce czasu przez górną stronę płata S wynosi π.