1. Funkcje dwóch zmiennych

Funkcją f dwóch zmiennych rzeczywistych określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru D dokładnie jednej liczby rzeczywistej. Piszemy wtedy

$$f : D \to \mathbb{R} \ , \ f(x, y) = z \ .$$

Zbiór postaci

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\Big\}$$

nazywamy wykresem funkcji f.

Ciągiem punktów w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nazywamy odwzorowanie zbioru liczb naturalnych w zbiór $\mathbb{R}^2$. Wartości tego odwzorowania dla $n \in \mathbb{N}$ nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy P_n lub (x_n, y_n).

Ciąg punktów $P_n = (x_n, y_n)$ jest zbieżny do punktu $P_0 = (x_0, y_0)$ jeśli ciąg odległości punktów P_n od punktu P_0 jest zbieżny do 0, czyli $\lim_{n\to\infty} |P_0P_n| = 0$. Piszemy wtedy $\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$.

Jeśli $P_n = (x_n, y_n)$ i $P_0 = (x_0, y_0)$, to

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y_0\right) \ .$$

Definicja 1. *Niech f będzie określona w zbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$ i niech $(x_0, y_0) \in D$. Granicą funkcji f w punkcie (x_0, y_0) jest liczba g wtedy i tylko wtedy gdy każdemu ciągowi (x_n, y_n) punktów należących do D i różnych od (x_0, y_0) takich, że $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ odpowiada ciąg $(f(x_n, y_n))$ zbieżny do g. Piszemy wtedy $\lim_{(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g$.*

Definicja 2. *Funkcja f jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) jeśli istnieją granica funkcji f w punkcie (x_0, y_0) oraz wartość $f(x_0, y_0)$ i zachodzi równość*

$$\lim_{(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \ .$$

Definicja 3. *Funkcja f jest ciągła w zbiorze $D \in \mathbb{R}^2$ jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.*

Własności funkcji ciągłych podane są w następujących twierdzeniach.

Twierdzenie 1. *Jeśli f i g są ciągłe w punkcie (x_0, y_0), to funkcje $f + g$, $f - g$, $f * g$, f/g (o ile $g(x_0, y_0) \neq 0$) też są ciągłe w punkcie (x_0, y_0).*

Twierdzenie 2 (Weierstrassa)**.** *Jeśli f jest ciągła w zbiorze domkniętym i ograniczonym $D \in \mathbb{R}^2$, to f jest w tym zbiorze ograniczona i osiąga w D wartość największą i wartość najmniejszą.*

Uwaga O zbiorze D mówimy, że jest domknięty gdy do zbioru D należy jego brzeg. Na przykład zbiór opisany nierównością $x^2 + y^2 \leqslant 1$ jest domknięty (jest to koło domknięte), zaś zbiór opisany nierównością $x^2 + y^2 < 1$ jest otwarty (jest to koło otwarte). Zbiór D jest ograniczony gdy można zamknąć go w pewnym kole o skończonym promieniu.

Uwaga Twierdzenie Weierstrassa gwarantuje istnienie rozwiązań bardzo ważnej kategorii zadań dotyczących wyznaczania wartości największej i najmniejszej funkcji ciągłej w danym zbiorze domkniętym i ograniczonym.