1 Układy równań - metoda macierzy odwrotnej

Zadanie 1. **Korzystając z macierzy odwrotnej rozwiązać układy równań:**

(a) $\begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=0 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y-3z=-3 \\ 2x+4y+z=1 \end{cases}$

Rozwiązanie przykładu (a):
Układ równań możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Aby móc skorzystać z tej metody, wyznacznik macierzy A musi być różny od 0. Otrzymujemy $|A| = -1 \neq 0$. Widzimy, że $AX = B$. Z poprzednich ćwiczeń wiemy, że $A^{-1}AX = A^{-1}B$, stąd $X = A^{-1}B$. Zatem, aby wyznaczyć macierz X, wystarczy znaleźć macierz odwrotną do macierzy A i pomnożyć ją przez macierz wyrazów wolnych B. Metodą poznaną na ćwiczeniach, znajdujemy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

2 Układy równań - wzory Cramera

Zadanie 2. **Korzystając ze wzorów Cramera rozwiązać podane układy równań:**

(a) $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x+y+z=-1 \\ x+2z=-6 \\ 3y+2z=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x+3y+2z=1 \\ 3x+4y+2z=2 \\ 4x+2y+3z=3 \end{cases}$

Rozwiązanie przykładu (a):
Układ równań możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Układ jest układem Cramera (proszę to sprawdzić!), zatem możemy skorzystać ze wzorów Cramera:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|},\ y = \frac{|A_2|}{|A|},\ z = \frac{|A_3|}{|A|},$$

gdzie $|A|$ jest wyznacznikiem macierzy współczynników; $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$ są wyznacznikami powstałymi przez usunięcie kolumny współczynników stojących przy zmiennej x, y i z odpowiednio i zastąpienie jej, w każdym przypadku, kolumną wyrazów wolnych. Mamy

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180,\ \ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60,\ \ |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60,$$

zatem

$$x = \frac{180}{60} = 3,\ y = \frac{60}{60} = 1,\ z = \frac{60}{60} = 1.$$