Analiza wektorowa

Przykład 1. Oblicz gradient funkcji $f(x,y,z) = (x^2+y^2)z$.

Obliczamy pochodne cząstkowe funkcji f i mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = x^2+y^2.$$

Zatem $\overrightarrow{grad} f = [2xz, 2yz, x^2+y^2]$.

Przykład 2. W jakich punktach wektor $\overrightarrow{grad} f$, gdzie $f(x,y) = (x^2+y^2)^{3/2}$, ma długość 2?

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \tfrac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2} = 3x\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot \tfrac{3}{2}(x^2+y^2)^{1/2} = 3y\sqrt{x^2+y^2} \ ,$$

a więc

$$\left|\overrightarrow{grad} f\right| = \sqrt{\left(3x\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + \left(3y\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \sqrt{9x^2(x^2+y^2)+9y^2(x^2+y^2)} = \sqrt{9(x^2+y^2)^2} = 3(x^2+y^2) \ .$$

Zatem

$$\left|\overrightarrow{grad} f\right| = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+y^2) = \tfrac{2}{3} \ ,$$

co oznacza, że punkty o tej własności, że wektor $\overrightarrow{grad} f$ ma długość 2 leżą na okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt{2/3}$.

Przykład 3. Oblicz dywergencję funkcji wektorowej $F(x,y,z) = [y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2]$.

Mamy $P(x,y,z) = y^2+z^2$, $Q(x,y,z) = x^2+z^2$, $R(x,y,z) = x^2+y^2$ i

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial y} = 0 \ , \ \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \ ,$$

skąd div $\overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$.

Przykład 4. Oblicz laplasjan funkcji $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$.

Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2+y^2+z^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{2(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \ .$$

Podobnie otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} \ .$$

Stąd

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{2(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{2}{x^2+y^2+z^2} \ .$$

Przykład 5. Oblicz rotacje podanego pola wektorowego $F(x,y,z) = [y,x,z]$.

Korzystamy ze wzoru

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right].$$

Mamy $P = y, \quad Q = x, \quad R = z$ oraz

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial P}{\partial y} & = 1, & \frac{\partial P}{\partial z} & = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & = 1, & \frac{\partial Q}{\partial z} & = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial x} & = 0, & \frac{\partial R}{\partial y} & = 0, \end{array}$$

a zatem

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Stąd $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = [0,0,0]$.

Przykład 6. Sprawdzić, czy pole

$$\overrightarrow{F} = [e^x \cos x, \ -e^x \sin y]$$

jest bezwirowe. Jeśli tak, to wyznaczyć potencjał tego pola.

Korzystamy ze wzoru $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. Aby pole było bezwirowe (potencjalne), musi być spełniony warunek $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = 0$. Mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

Zatem $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y + e^x \sin y = 0$. Zatem pole jest bezwirowe. Potencjałem tego pola jest funkcja f taka, że

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y.$$

Po scałkowaniu pierwszego wyrażenia otrzymujemy

$$f(x,y) = e^x \cos y + c(y).$$

Obliczamy pochodną cząstkową po y z powyższej funkcji i porównujemy z drugim wyrażeniem. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + \frac{\partial c}{\partial y} = -e^x \sin y,$$

stąd $\frac{\partial c}{\partial y} = 0$, co oznacza $c(y) = c$, gdzie c jest stałą rzeczywistą. Zatem potencjał ma postać

$$f(x,y) = e^x \cos y + c(y).$$

.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Oblicz gradienty podanych funkcji:
   a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
   b) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

2. Znaleźć punkt (x, y), w którym $\overrightarrow{grad} f = [1, -16/9]$, gdzie $f(x, y) = \ln(x + 1/y)$.

3. Oblicz dywergencję pola wektorowego
   a) $F(x, y, z) = [x^2yz, xy^2z, xyz^2]$,
   b) $F(x, y, z) = [e^x y, -\cos y, \sin^2 z]$.

4. Oblicz rotacje podanych pól wektorowych
   a) $F(x, y, z) = [x, y, z]$,
   b) $F(x, y, z) = [z, x, y]$,
   c) $F(x, y, z) = [y, z, x]$.

5. Oblicz wartość laplasjanu funkcji $f(x, y, z) = x^2e^{yz} + xy^3z^2$ w punkcie $P_0(2, -1, -1)$.

6. Sprawdzić, czy pole $\overrightarrow{F} = [ze^{xy} + xyze^{xy},\ x^2ze^{xy},\ xe^{xy}]$ jest bezwirowe. Jeśli tak, to wyznaczyć potencjał tego pola.