Analiza wektorowa

W zastosowaniach teorię całki wygodnie jest opisywać w postaci wektorowej. Obiekty fizyczne są opisywane bądź wielkościami skalarnymi (masa, temperatura, czas), bądź wielkościami wektorowymi (siła, prędkość, przyspieszenie). Z tego powodu mówimy bądź o **polach skalarnych**, bądź o **polach wektorowych**. Jeśli z każdym punktem przestrzeni zwiążemy pewną wielkość (skalarną lub wektorową), to mówimy, że dane jest pole tej wielkości (skalarne lub wektorowe). Innymi słowy polem skalarnym jest funkcja $f(x,y,z)$, zaś polem wektorowym wektor $\overrightarrow{F}$ złożony z trzech funkcji 3 zmiennych $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Piszemy wtedy $\overrightarrow{F}=[P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)]$ lub krótko, bez podawania punktu, na który działają funkcje, $\overrightarrow{F}=[P,Q,R]$.

Przykład Na płaszczyźnie xOy znajduje się warstwa cieczy, której cząstki poruszają się po okręgach o środku $O(0,0)$ w tym samym kierunku z prędkością odwrotnie proporcjonalną do promienia. Ruch taki nazywamy wirem o środku O.

Prędkość cząstki znajdującej się w pewnym momencie w punkcie $P(x,y)\neq O(0,0)$ jest wektorem $\overrightarrow{v}(P)$ stycznym do okręgu o promieniu $r=|\overrightarrow{OP}|$ i ma długość $\frac{\omega}{r}$, gdzie ω jest pewną stałą. Ponieważ $\overrightarrow{OP}=[x,y]$ i $\overrightarrow{v}(P)\circ\overrightarrow{OP}=0$, więc $\overrightarrow{v}(P)$ ma kierunek wektora $[-y,x]$ (wtedy iloczyn skalarny jest równy 0), lub co na jedno wychodzi, wektora $[-\frac{y}{r},\frac{x}{r}]$ (ten wektor ma już długość 1). Wobec tego, że $|\overrightarrow{v}(P)|=\frac{\omega}{r}$, mamy

$$\overrightarrow{v}(P)=\frac{\omega}{r}[-\tfrac{y}{r},\tfrac{x}{r}]=\omega[-\tfrac{y}{r^2},\tfrac{x}{r^2}]=\omega[-\tfrac{y}{x^2+y^2},\tfrac{x}{x^2+y^2}]\ .$$

Jest to pole prędkości wiru o środku $O(0,0)$ z prędkością kątową na okręgu jednostkowym równą ω. W punkcie O pole jest nieokreślone.

W analizie wektorowej posługujemy się następującymi operatorami.

Definicja 1 **Gradientem funkcji** f *nazywamy wektor* $\overrightarrow{grad}f=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right]$.

Definicja 2 **Laplasjanem funkcji** f *nazywamy liczbę* $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Definicja 3 **Dywergencją funkcji wektorowej** $\overrightarrow{F}=[P,Q,R]$ *nazywamy liczbę* $\operatorname{div}\overrightarrow{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$.

Definicja 4 **Rotacją funkcji wektorowej** $\overrightarrow{F}=[P,Q,R]$ *nazywamy wektor*

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}=\left[\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]\ .$$

Uwaga Jeśli dane jest pole skalarne f lub wektorowe $\overrightarrow{F}=[P,Q]$ na płaszczyźnie xOy (a nie w przestrzeni $\mathbb{R}^3$), to przyjmujemy, że

$$\overrightarrow{grad}f=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right]\quad,\quad\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\quad,\quad\operatorname{div}\overrightarrow{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\quad,\quad\operatorname{rot}\overrightarrow{F}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\ .$$

Zatem rotacja jest w tym przypadku polem skalarnym.

Definicja 5 **Operator Hamiltona (nabla)** *jest to wektor symboliczny postaci* $\nabla=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]$.

Może on działać na pole skalarne lub wektorowe. Mamy wtedy:

$$\nabla f=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]f=\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right]=\overrightarrow{grad}f\ ,$$

$$\nabla\overrightarrow{F}=\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right]\circ[P,Q,R]=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\overrightarrow{F}\ ,$$

$$\nabla \times \overrightarrow{F} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] \times [P, Q, R] = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] = \text{rot}\,\overrightarrow{F} \ .$$

Można ponadto wykazać, że

$$\nabla^2 f = \nabla\left(\nabla f\right) = \nabla\left(\overrightarrow{grad} f\right) = \Delta f \ .$$

Definicja 6 *Mówimy, że pole wektorowe* $\overrightarrow{F}$ *w pewnym zbiorze* $G \subset \mathbb{R}^3$ *jest* **bezźródłowe**, *jeśli* $\text{div}\,\overrightarrow{F} = 0$ *w* G*.*

Definicja 7 *Mówimy, że pole wektorowe* $\overrightarrow{F}$ *w pewnym zbiorze* $G \subset \mathbb{R}^3$ *jest* **bezwirowe**, *jeśli* $\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ *w* G*.*

Definicja 8 *Mówimy, że pole wektorowe* $\overrightarrow{F}$ *w pewnym zbiorze* $G \subset \mathbb{R}^3$ *jest* **potencjalne**, *jeśli istnieje funkcja* $f(x, y, z)$ *taka, że* $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{grad} f$ *(czyli* $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $R = \frac{\partial f}{\partial z}$*). Funkcję* f *nazywamy* **potencjałem** *pola* $\overrightarrow{F}$ *w zbiorze* G*.*

Z powyższej definicji wynika, że różniczką zupełną potencjału f jest wyrażenie $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = Pdx + Qdy + Rdz$. Z kolei warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by wyrażenie $Pdx + Qdy + Rdz$ było różniczką zupełną pewnej funkcji jest spełnienie poniższego układu

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \ .$$

Zatem

Twierdzenie 1 *Pole wektorowe* $\overrightarrow{F}$ *w zbiorze wypukłym* $G \subset \mathbb{R}^3$ *jest potencjalne wtedy i tylko wtedy gdy* $\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ *dla każdego* $(x, y, z) \in G$*.*

Oznacza to, że pojęcia 'pole bezwirowe' i 'pole potencjalne' znaczą to samo.

Wniosek 1 *Jeżeli funkcje* $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ *są ciągłe w zbiorze* G *i mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to całka krzywoliniowa*

$$\int_K P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

nie zależy od drogi całkowania zawartej w G *wtedy i tylko wtedy gdy* $\text{rot}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ *dla każdego* $(x, y, z) \in G$*.*

Przykład Pole elektrostatyczne ładunku punktowego q umieszczonego w początku układu współrzędnych działające na jednostkowy ładunek umieszczony w punkcie $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ jest funkcją wektorową $\overrightarrow{F} = \frac{q}{r^3}[x, y, z] = \left[\frac{xq}{r^3}, \frac{yq}{r^3}, \frac{zq}{r^3}\right]$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Oblicz $\text{div}\,\overrightarrow{F}$.

Mamy

$$P(x, y, z) = \frac{xq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \ , \ Q(x, y, z) = \frac{yq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \ , \ R(x, y, z) = \frac{zq}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \ .$$

Stąd

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= q \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x\frac{\partial}{\partial x}((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2})}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= q \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x \cdot 2x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= q \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= q \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}\left[(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2\right]}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= q \cdot \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \ . \end{aligned}$$

Łatwo zaobserwować, że zachodzi swego rodzaju symetria: gdy liczymy pochodną cząstkową funkcji Q po y to wykonujemy dokładnie te same kroki i otrzymujemy te same wyniki co przy liczeniu pochodnej cząstkowej P po x (oczywiście ze stosowną zamianą zmiennych x na y). To samo dzieje się przy liczeniu pochodnej cząstkowej R po z. Zatem

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = q \cdot \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial z} = q \cdot \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \ ,$$

skąd

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = q \cdot \left[\frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right] = 0 \ .$$

Przykład Pole $\overrightarrow{F} = [yz, xz, xy]$ jest bezwirowe ($\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$) i bezźródłowe ($\operatorname{div} \overrightarrow{F} = 0$) na całej płaszczyźnie. Potencjałem tego pola jest funkcja $f(x, y, z) = xyz$.

Przykład Spradzić, czy pole

$$\overrightarrow{F} = [\sin yz^2, xz^2 \cos yz^2 + 2 + \ln z, 2xyz \cos yz^2 + \tfrac{y}{z}]$$

jest potencjalne. Jeśli tak, to wyznaczyć potencjał tego pola.

Mamy

$$P = \sin yz^2 \quad , \quad Q = xz^2 \cos yz^2 + 2 + \ln z \quad , \quad R = 2xyz \cos yz^2 + \tfrac{y}{z}$$

i

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial P}{\partial y} & = z^2 \cos yz^2 \quad , & \frac{\partial P}{\partial z} & = 2yz \cos yz^2 \ , \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & = z^2 \cos yz^2 \quad , & \frac{\partial Q}{\partial z} & = 2xz \cos yz^2 - 2xyz^3 \sin yz^2 + \frac{1}{z} \ , \\ \frac{\partial R}{\partial x} & = 2yz \cos yz^2 \quad , & \frac{\partial R}{\partial y} & = 2xz \cos yz^2 - 2xyz^3 \sin yz^2 + \frac{1}{z} \ , \end{array}$$

a zatem

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \ .$$

Pole jest więc potencjalne. Potencjałem tego pola jest funkcja f taka, że

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin yz^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 \cos yz^2 + 2 + \ln z \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz \cos yz^2 + \tfrac{y}{z} \ .$$

W wyniku całkowania pierwszego równania otrzymujemy

$$f(x, y, z) = x \sin yz^2 + c(y, z) \ .$$

Obliczamy pochodną cząstkową po y z powyższej funkcji i porównujemy z drugim równaniem. Mamy

$$xz^2 \cos yz^2 + \frac{\partial c}{\partial y} = xz^2 \cos yz^2 + 2 + \ln z \ ,$$

skąd

$$c(y, z) = \int (2 + \ln z) \, dy = 2y + y \ln z + d(z) \ .$$

Wstawiając $c(y, z)$ do wyznaczonej powyżej funkcji f mamy więc

$$f(x, y, z) = x \sin yz^2 + 2y + y \ln z + d(z) \ .$$

Obliczamy pochodną cząstkową po z z powyższej funkcji i porównujemy z trzecim równaniem. Mamy

$$2xyz \cos yz^2 + \tfrac{y}{z} = 2xyz \cos yz^2 + \tfrac{y}{z} + d'(z) \ ,$$

co daje $d(z) = a$. Ostatecznie, potencjałem pola $\overrightarrow{F}$ jest funkcja $f(x, y, z) = x \sin yz^2 + 2y + y \ln z + a$, gdzie a jest dowolną stałą.