

Niezależność całki od drogi całkowania - ćwiczenia

Zadanie 1.

Sprawdzić czy podane wyrażenia są różniczkami zupełnymi pewnych funkcji. Jeśli tak, proszę znaleźć te funkcje.

(a) $(2x + 3x^2y) dx + (x^3 - 3y^2) dy$;

(b) $(x - y) dx + (2y - x) dy$;

(c) $(2x - y) dx - (x - 4y) dy$; wskazówka: $Q(x, y) = -(x - 4y) = 4y - x$

(d) $(xy^2) dx + (x^2y) dy$;

(e) $(x + yz) dx + (y + xz) dy + (z + xy) dz$.

Rozwiązanie przykładu (a):

Widzimy, że $P(x, y) = 2x + 3x^2y$ oraz $Q(x, y) = x^3 - 3y^2$. Zatem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \quad \implies \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Zatem rozważane wyrażenie jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x, y)$, takiej, że

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) = 2x + 3x^2y$$

oraz

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) = x^3 - 3y^2$$

Z równania (1) otrzymujemy $F(x, y) = \int (2x + 3x^2y) dx = x^2 + yx^3 + \psi(y)$. Różniczkując otrzymaną funkcję względem zmiennej y mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 + x^3 + \psi'(y).$$

Korzystając z równania (2) mamy $x^3 + \psi'(y) = x^3 - 3y^2$, zatem $\psi'(y) = -3y^2$. Stąd $\psi(y) = -y^3 + c$. Ostatecznie, funkcja $F(x, y)$ ma postać

$$F(x, y) = x^2 + yx^3 - y^3 + c.$$

Zadanie 2.

Sprawdzić, że podane całki krzywoliniowe nie zależą od drogi całkowania a następnie obliczyć te całki.

(a) $\int_K (\sin x \cos y) dx + (\cos x \sin y) dy$, gdzie K jest dowolnym łukiem łączącym punkty $A = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ oraz $B = (\pi, \pi)$;

(b) $\int_K x dx + y dy$, gdzie K jest dowolnym łukiem łączącym punkty $A = (1, 1)$ oraz $B = (-1, -2)$;

(c) $\int_K (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$, gdzie K jest dowolnym łukiem łączącym punkty $A = (1, 1, 1)$ oraz $B = (2, 3, 4)$;

(d) $\int_K (e^x \cos y) dx - (e^x \sin y) dy$, gdzie K jest dowolnym łukiem łączącym punkty $A = (0, 0)$ oraz $B = (1, \frac{\pi}{2})$.

Rozwiązanie przykładu (d):

Widzimy, że $P(x, y) = e^x \cos y$ oraz $Q(x, y) = -e^x \sin y$. Zatem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y \quad \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Zatem całka nie zależy od drogi całkowania. Oznacza to, że istnieje pewna funkcja $F(x, y)$, taka, że

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) = e^x \cos y$$

oraz

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) = -e^x \sin y$$

Z równania (1) otrzymujemy $F(x, y) = \int (e^x \cos y) dx = e^x \cos y + \psi(y)$. Różniczkując otrzymaną funkcję względem zmiennej y mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^x \sin y + \psi'(y).$$

Korzystając z równania (2) mamy $-e^x \sin y + \psi'(y) = -e^x \sin y$, zatem $\psi'(y) = 0$. Stąd $\psi(y) = c$. Ostatecznie, funkcja $F(x, y)$ ma postać

$$F(x, y) = e^x \cos y + c.$$

Korzystając z uogólnionego wzoru Newtona-Leibniza mamy

$$\int_K (e^x \cos y) dx - (e^x \sin y) dy = F\left(1, \frac{\pi}{2}\right) - F(0, 0) = e \cos \frac{\pi}{2} + c - e^0 \cos 0 - c = -1.$$

Z wykładu wiemy, że taką całkę możemy policzyć innym sposobem. Wiemy, że funkcja podcałkowa jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x, y)$, zatem całka nie zależy od kształtu krzywej całkowania. Mianowicie, korzystając z wniosku 1 z wykładu możemy tę całkę policzyć po odcinku łączącym punkty A i B . Parametryzacja odcinka AB jest następująca (korzystamy ze wzoru na parametryzację odcinka na płaszczyźnie):

$$AB : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{\pi}{2}t, \text{ gdzie } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Liczmy pochodne: $x'(t) = 1$, $y'(t) = \frac{\pi}{2}$. Zatem

$$\int_K (e^x \cos y) dx - (e^x \sin y) dy = \int_0^1 (e^t \cos \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2} e^t \sin \frac{\pi}{2}t) dt = \int_0^1 (e^t \cos \frac{\pi}{2}t) dt - \frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^t \sin \frac{\pi}{2}t) dt = I.$$

Licząc pierwszą całkę przez części otrzymujemy

$$I = \left(e^t \cos \frac{\pi}{2}t\right)_0^1 + \frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^t \sin \frac{\pi}{2}t) dt - \frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^t \sin \frac{\pi}{2}t) dt = \left(e^t \cos \frac{\pi}{2}t\right)_0^1 = e \cos \frac{\pi}{2} - e^0 \cos 0 = -1.$$

Zadanie 3.

Korzystając z Twierdzenia Greena obliczyć całki.

- (a) $\oint_K (x^2 y) dx + xy(y + 1) dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 + 2y = 0$ zorientowanym dodatnio;
- (b) $\oint_K (1 - x^2)y dx + x(y^2 + 1) dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = 4$ zorientowanym dodatnio;
- (c) $\oint_K (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$, gdzie K jest trójkątem o wierzchołkach $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$ oraz $C(2, 5)$ zorientowanym dodatnio;
- (d) $\oint_K y^2 dx + 2x dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = 2$ zorientowanym dodatnio;
- (e) $\oint_K \sqrt{x^2 + y^2} dx + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy$, gdzie K jest okręgiem jednostkowym zorientowanym dodatnio.

Rozwiązanie przykładu (e):

Funkcje $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $Q(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ spełniają założenia twierdzenia Greena (proszę to sprawdzić!) oraz

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{i} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Zatem

$$\oint_K \sqrt{x^2 + y^2} dx + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) dy = \iint_D \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx dy = I$$

Zbiór D jest kołem jednostkowym, zatem korzystając ze współrzędnych biegunowych (po uproszczeniu rachunków) otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (1 - \sin \theta) dr \right] d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - \sin \theta) [r]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin \theta) d\theta = [\theta + \cos \theta]_0^{2\pi} = (2\pi + \cos 2\pi) - (0 + \cos 0) = 2\pi. \end{aligned}$$