0.1 Zamiana zmiennych w całce podwójnej.

Niech Δ i D będą zbiorami odpowiednio na płaszczyznach uOv i xOy. Przekształceniem obszaru Δ w obszar D nazywamy funkcję $T : \Delta \to D$ określoną wzorem:

$$(x, y) = T(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v)), \quad gdzie (u, v) \in \Delta.$$

Obrazem zbioru Δ przy przekształceniu T nazywamy zbiór:

$$T(\Delta) := \{(x, y) : x = \phi(u, v), y = \phi(u, v), (u, v) \in \Delta\}.$$

Przekształcenie T nazywamy:

- ciągłym, jeżeli funkcje ϕ i ψ są ciągłe na zbiorze Δ;
- różnowartościowym, jeżeli różnym punktom zbioru Δ odpowiadają różne punkty jego obrazu D.

Przy zamianie zmiennych w całce podwójnej używamy operatora nazywanego Jakobianem przekształcenia. Mamy

Definicja 1 *Jakobianem przekształcenia $T(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v))$ nazywamy funkcję określoną wzorem:*

$$J_T(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Dla całki podwójnej istnieje twierdzenie o zamianie zmiennych w całce podwójnej, które jest odpowiednikiem twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie dla całki pojedynczej. Mamy:

Twierdzenie 1 *Niech*

1. *przekształcenie T : $\begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ odwzorowuje różnowartościowo wnętrze zbioru Δ na wnętrze zbioru D;*
2. *funkcje ϕ, ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na pewnym zbiorze otwartym zawierającym Δ,*
3. *funkcja f jest określona i ciągła w zbiorze D*
4. *jakobian J_T jest różny od zera wewnątrz zbioru Δ.*

Wtedy

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \iint\limits_\Delta f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |J_T(u, v)| dudv.$$

0.2 Współrzędne biegunowe

W przypadku, gdy obszar całkowania jest kołem, pierścieniem wycinkiem jednej z tych figur a, także i w wielu innych przypadkach (gdy w opisie zbioru występuje $x^2 + y^2$ lub $x^2 - y^2$) wygodnie jest przy obliczaniu całki podwójnej wprowadzić współrzędne biegunowe.

Definicja 2 *Współrzędnymi biegunowymi nazywamy układ zmiennych (r, φ), które wiąże ze współrzędnymi kartezjańskimi (x, y) następująca zależność:*

$$\begin{cases} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{cases}.$$

Zmienne (r, φ) spełniają następujące warunki $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (czasami wygodniej jest przyjąć zakres zmienności φ w zakresie $-\pi$ do π, wybór taki jest również prawidłowy).

W przypadku współrzędnych biegunowych Jakobian, oznaczony jako $J(r, \varphi)$ jest stały i równy r. Wzór na zamianę całki podwójnej przy użyciu współrzędnych biegunowych przyjmuje postać:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi,$$

gdzie Δ jest obrazem zbioru D poprzez współrzędne biegunowe.

Przykład.

Obliczyć całkę $\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy$, gdzie D jest opisany warunkiem $x^2+y^2 \leqslant 4$.

Rozpocznijmy od przekształcenia zbioru D w zbiór Δ, przekształcenie to określi nam dokładny zakres zmienności (r, φ). Mamy

$$x^2+y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2\left[(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2\right] = r^2,$$

Zatem z warunku opisującego zbiór D mamy $r^2 \leqslant 4$ co jest równoważne $r \leqslant 2$. Ponieważ nie ma żadnych dodatkowych warunków zadania przyjmuje najszerszy zakres zmienności φ czyli przedział $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy &= \iint\limits_\Delta \sqrt{4-r^2}\cdot rdrd\varphi = \int_0^2\left[\int_0^{2\pi}\sqrt{4-r^2}\cdot rd\varphi\right]dr \\
&= \int_0^2\left[\sqrt{4-r^2}\cdot r\int_0^{2\pi}d\varphi\right]dr = \int_0^2\left(\sqrt{4-r^2}\cdot r\,[\varphi]_0^{2\pi}\right)dr \\
&= 2\pi\int_0^2\left(\sqrt{4-r^2}\cdot r\right)dr
\end{aligned}$$

Stosując podstawienie $4-r^2=t^2$ mamy $rdr=-tdt$ i stosując zamianę granic otrzymujemy

$$\iint\limits_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy = 2\pi\int_2^0 (t\cdot(-t))\,dt = -2\pi\int_2^0 t^2dt = -2\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_2^0 = \frac{16}{3}\pi.$$

Przykład.

Obliczyć całkę $\iint_D xydxdy$, gdzie D jest opisany warunkiem $x^2+y^2 \leqslant 2x$, $y \geqslant 0$.

Rozpocznijmy od przekształcenia zbioru D w zbiór Δ, przekształcenie to określi nam dokładny zakres zmienności (r, φ). z poprzedniego zadania wiemy, że $x^2+y^2=r^2$.

Zatem z warunku opisującego zbiór D mamy $r^2 \leqslant 2r\cos\varphi$, co jest równoważne $r \leqslant 2\cos\varphi$. Ponieważ $r \geqslant 0$ i poprzedni warunek implikuje, że $\cos\varphi \geqslant 0$, a stąd mamy warunek (1) $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ponadto warunek $y \geqslant 0$ jest równoważny $\sin\varphi \geqslant 0$, czyli (2) $\varphi \in [0, \pi]$. Warunki (1) i (2) dają $\varphi \in [0, \pi]$. Zatem

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D xydxdy &= \iint\limits_\Delta (r\cos\varphi r\sin\varphi)\cdot rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2\cos\varphi} r^3\cos\varphi\sin\varphi dr\right]d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\varphi\sin\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^3dr\right]d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\varphi\sin\varphi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^5\varphi\sin\varphi\right)d\varphi
\end{aligned}$$

Podstawiając $\cos\varphi = t$ mamy $-\sin\varphi d\varphi = dt$ i zmieniając granice całkowania otrzymujemy:

$$\iint\limits_D xydxdy = 4\int_0^1 (t^5)dt = 4\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$