

Równania powierzchni stopnia drugiego

Arkadiusz Syta

Definicja

Powierzchnią stopnia drugiego nazywamy zbiór punktów przestrzeni trójwymiarowej, które spełniają równanie

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0,$$

gdzie A, B, \dots, K są stałymi. Ponadto, przynajmniej jedna ze stałych A, B, C, D, E, F musi być różna od zera.

Można wykazać, że istnieje takie przekształcenie płaszczyzny (złożenie obrotu i przesunięcia), dzięki któremu otrzymamy tzw. postać kanoniczną powierzchni:

$$\tilde{A}x^2 + \tilde{B}y^2 + \tilde{C}z^2 + \tilde{K} = 0.$$

Możemy wyróżnić kwadryki właściwe i zdegenerowane (niewłaściwe).

Kwadryki właściwe:

- elipsoida (w tym sfera)
- hiperboloida jednowłokowa
- hiperboloida dwuwłokowa
- stożek eliptyczny
- paraboloida eliptyczna
- paraboloida hiperboliczna
- walec eliptyczny
- walec hiperboliczny
- walec paraboliczny

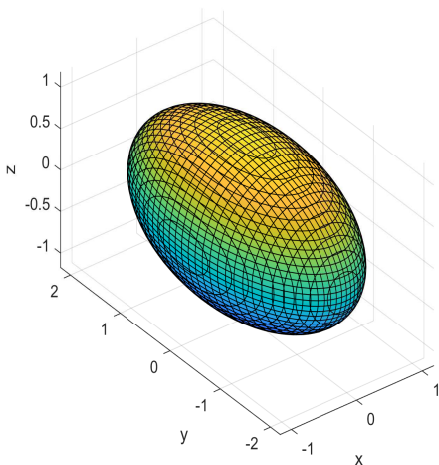
Przykłady kwadryk niewłaściwych:

- Równanie $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ - punkt $(0, 0, 0)$
- Równanie $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ - zbiór pusty
- Równanie $x^2 + y^2 = 0$ - oś Oz

Elipsoida

Elipsoida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

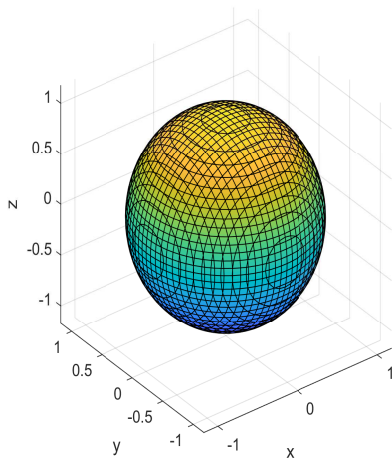


Sfera

Sfera = elipsoida dla

$$a = b = c$$

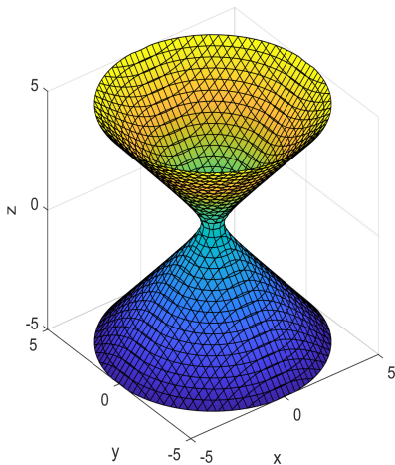
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloida jednowłokowa

Hiperboloida
jednowłokowa:

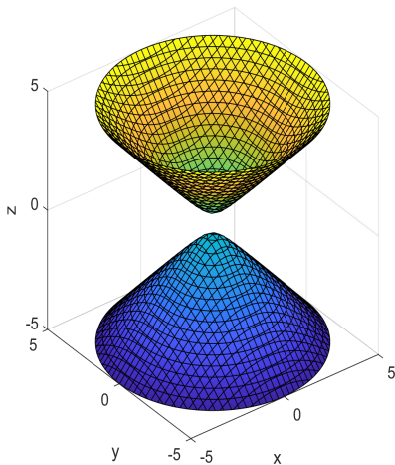
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloida dwupowłokowa

Hiperboloida
dwupowłokowa:

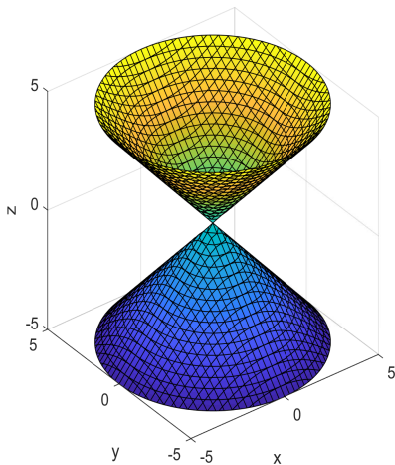
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Stożek eliptyczny

Stożek eliptyczny:

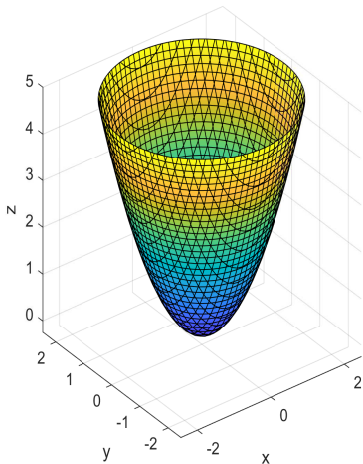
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



Parabolida eliptyczna

Paraboloida
eliptyczna:

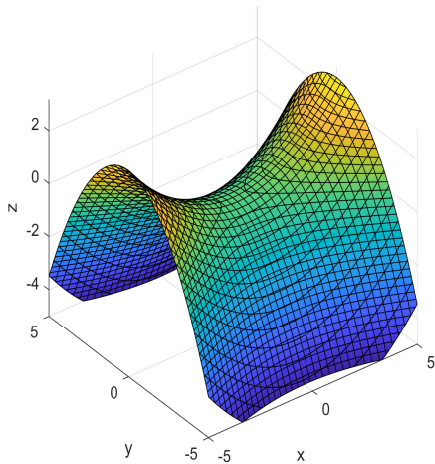
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$



Parabolida hiperboliczna

Paraboloida
hiperboliczna:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



Walec eliptyczny

Walec eliptyczny:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

