

Całka potrójna - współrzędne sferyczne - ćwiczenia

Zadanie.

Korzystając ze współrzędnych sferycznych oraz z Twierdzenia 1 z wykładu obliczyć całkę potrójną.

$$(a) \iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, x \geq 0, z \geq 0\}$$

$$(b) \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

$$(c) \iiint_V (2y + 3z) dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$$

$$(d) \iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

$$(e) \iiint_V (x + y)z dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Rozwiązanie przykładu (a):

Korzystając ze współrzędnych sferycznych oraz z "jedyńki trygonometrycznej" wyrażenie $x^2 + y^2 + z^2$ możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (r \cos \varphi \cos \theta)^2 + (r \sin \varphi \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \\ &= r^2 (\cos \theta)^2 [(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2] + r^2 (\sin \theta)^2 \\ &= r^2 [(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2] = r^2. \end{aligned}$$

Z opisu zbioru V otrzymujemy $3 \leq r \leq 4$. Ponieważ $z \geq 0$, co jest równoważne temu, że $r \sin \theta \geq 0$ mamy, że $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Ponadto, z warunku $x \geq 0$, dostajemy $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Korzystamy ze wzoru podanego w Twierdzeniu 1 i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega} \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta \\ &= \int_3^4 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right) d\varphi dr \right] \\ &= \int_3^4 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi dr \right] = \int_3^4 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) d\varphi \right] dr \\ &= \int_3^4 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \right] dr = \int_3^4 [\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_3^4 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] dr \\ &= \pi \int_3^4 dr = \pi [r]_3^4 = \pi. \end{aligned}$$

Rozwiązanie przykładu (e):

$$\iiint_V (x+y)z \, dx dy dz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Zbiór V jest ósemką kuli. Stąd mamy $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ oraz $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Rozważmy funkcję podcałkową. Podstawmy współrzędne sferyczne:

$$(x+y)z = (r \cos \varphi \cos \theta + r \sin \varphi \cos \theta)r \sin \theta = r^2 \sin \theta \cos \theta (\sin \varphi + \cos \varphi).$$

Zatem

$$\begin{aligned} \iiint_V (x+y)z \, dx dy dz &= \iiint_{\Omega} r^2 \sin \theta \cos \theta (\sin \varphi + \cos \varphi) \cdot r^2 \cos \theta \, dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \sin \theta (\cos \theta)^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi \right) d\theta \right] dr \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \sin \theta (\cos \theta)^2 (-\cos \varphi + \sin \varphi)_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \right] dr \\ &= 2 \int_0^1 r^4 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\cos \theta)^2 d\theta \right] dr \end{aligned}$$

Podstawiając $\cos \theta = t$ mamy

$$\begin{aligned} \iiint_V z \, dx dy dz &= 2 \int_0^1 r^4 \left[\int_0^1 t^2 dt \right] dr = 2 \int_0^1 r^4 \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 dr \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 r^4 dr = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^1 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$