

1. Niech $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + 3i$. Oblicz:

- $z_1 - 3z_2$
 - $z_1 \cdot z_2$
 - $\frac{z_1}{z_2}$
 - $(z_1 + z_2)^2$
- $\frac{(z_2 + z_1)^2}{2z_2}$
 - $\frac{z_2^2}{z_1}$

2. Rozwiąż równania w zbiorze liczb zespolonych:

- $z^2 + 4 = 0$
- $z^2 + 2z + 2 = 0$
- $z^2 + 4z + 5 = 0$
- $z^2 + 25 = 9$
- $z^2 + 2z + 5 = 0$
- $z^2 - 4z + 13 = 0$

3. Oblicz i przedstaw w postaci algebraicznej:

- $(1 + i)^{10}$
- $(-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i)^8$
- $(-1 + \sqrt{3}i)^9$
- $(1 - i)^{16}$
- $(8i)^{20}$
- $(-\sqrt{3} + i)^{12}$
- $(-2 - 2i)^{12}$
- $(-2i)^{12}$
- $(\sqrt{3}i + 1)^6$

4. Oblicz z definicji:

- $\sqrt{-4i}$
- $\sqrt{3 + 4i}$
- $\sqrt{8 - 6i}$
- $\sqrt{2i}$
- $\sqrt{5 - 12i}$
- $\sqrt{15 + 8i}$

5. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Oblicz:

- $2A - B$
- B^3
- $B \cdot A^2$
- $A^{-1} \cdot B$
- A^2
- $A \cdot B$
- A^{-1}
- $(A + B)^T$

6. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oblicz:

- $|A|$
- $|B|$
- $|A \cdot B|$
- $|C|$

7. Za pomocą wzorów Cramera rozwiąż układy równań:

(a)

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = -1 \\ -x + y - 2z = 1 \\ x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Odpowiedź: $x = -3, y = 0, z = 1$.

(b)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

Odpowiedź: $x = 1, y = 1, z = 2$.

(c)

$$\begin{cases} x + y + 2z = -5 \\ -3x + 2y - z = 10 \\ 2x - y - 3z = 5 \end{cases}$$

Odpowiedź: $x = -1, y = 2, z = -3$.

(d)

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + 4t = 1 \\ -x + y - 2z - t = 3 \\ -x - 2y - z + t = 4 \\ -y + z + 2t = -1 \end{cases}$$

Odpowiedź: $x = 0, y = -1, z = -2, t = 0$.

(e)

$$\begin{cases} x - y + z - t = -2 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 3x - 3y - 2z - t = 0 \\ 2x + y + z + 2t = -1 \end{cases}$$

Odpowiedź: $x = 2, y = 1, z = 0, t = 3$.

8. Niech dane będą punkty $A = (1, -2, 0), B = (1, 0, -1), C = (2, -3, -1), D = (-3, 2, 0)$.
Oblicz:

(a) Długości wektorów: \vec{CA} i \vec{CD} .

(b) Wersory wektorów: \vec{AB} i \vec{AC} .

(c) Kąt między wektorami \vec{AB} i \vec{AC} .

(d) Iloczyny skalarne: $\vec{CB} \circ \vec{BD}, \vec{AD} \circ \vec{CD}$.

(e) Iloczyny wektorowa: $\vec{CB} \times \vec{BD}, \vec{AD} \times \vec{CD}$.

(f) Pole trójkąta ABC .

(g) Pole równoległoboku $ABCD$.

9. Oblicz pochodne cząstkowe I rzędu funkcji:

(a) $f(x, y) = 2x^3y^4 - 3x + 2y - 1$

(f) $f(x, y) = \frac{x-2}{1-y}$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$

(g) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $f(x, y) = x(x-y)^5$

(h) $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$

(d) $f(x, y) = 2 - ye^{xy}$

(i) $f(x, y) = (x+2)^4(y-3)^2$

(e) $f(x, y) = \frac{y}{x}$

(j) $f(x, y) = xy \cos xy$

10. Oblicz pochodne cząstkowe II rzędu funkcji:

(a) $f(x, y) = 2x^3y^4 - 3x + 2y - 1$

(d) $f(x, y) = \frac{3 - 3x}{y + 2}$

(b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$

(e) $f(x, y) = (x - 5)^3(y + 7)^3$

(c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

(f) $f(x, y) = e^{xy}$

11. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1$

(e) $f(x, y) = 3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$

(b) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - x + 4y - 3$

(f) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$

(c) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 2$

(g) $f(x, y) = (6 - x - y)x^2y^3$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 4$

(h) $f(x, y) = (x + y)^2 - (x + 5y + xy)$

12. Oblicz całki:

(a) $\iint_D 2y \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 0\}.$

(b) $\iint_D x \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : -2 \leq x \leq -1, 0 \leq y \leq 1\}.$

(c) $\iint_D 6xy \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4\}.$

(d) $\iint_D (2 - 4y) \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : -3 \leq x \leq -1, 1 \leq y \leq 2\}.$

(e) $\iint_D (x + 2xy) \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 0\}.$

(f) $\iint_D (2x + 4) \, dx dy, \quad D : y = -x - 1, y = 0, x = 0.$

(g) $\iint_D (x - 2) \, dx dy, \quad D : y = x, y = -x + 2, x = 0.$

(h) $\iint_D (4y) \, dx dy, \quad D : y = 2x, y = 4x, x = 2.$

(i) $\iint_D 1 \, dx dy, \quad D : y = x^2 - 1, y = 3.$

(j) $\iint_D 1 \, dx dy, \quad D : y = x^2 - 2x, y = 3.$

(k) $\iint_D 1 \, dx dy, \quad D : y = x^2 - 2, y = -x.$

(l) $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (Zastosuj współrzędne biegunowe).

(m) $\iint_D x \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ (Zastosuj współrzędne biegunowe).

(n) $\iint_D y \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x \leq 0\}$ (Zastosuj współrzędne biegunowe).

(o) $\iint_D 1 \, dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, (x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ (Zastosuj współrzędne biegunowe).