RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE – PRZYKŁADY, ĆWICZENIA

(3) ROZWIĄŻ RÓWNANIE $\left(2y^3t - y^4 + 2ty\right) + \left(3y^2t^2 - 4y^3t + t^2\right)\frac{dy}{dt} = 0$

– ROZPOZNAJEMY TYP RÓWNANIA : RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE ZUPEŁNE?

$$P(t,y) + Q(t,y)\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{LUB} \quad P(t,y)\,dt + Q(t,y)\,dy = 0$$

– METODA ROZWIĄZANIA : JEŻELI WYRAŻENIE $P(t,y)\,dt + Q(t,y)\,dy$ JEST RÓŻNICZKĄ ZUPEŁNĄ PEWNEJ FUNKCJI $F(t,y)$, TO ROZWIĄZANIE DOSTAJEMY W POSTACI UWIKŁANEJ $\underline{F(t,y) = C}$

– SPRAWDZAMY WARUNEK NA ZUPEŁNOŚĆ: $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial t}$

W NASZYM PRZYPADKU $P(t,y) = 2y^3t - y^4 + 2ty$ $\quad Q(t,y) = 3y^2t^2 - 4y^3t + t^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y^3t - y^4 + 2ty\right) = 6y^2t - 4y^3 + 2t \equiv \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(3y^2t^2 - 4y^3t + t^2\right) = 6y^2t - 4y^3 + 2t$$

$$6y^2t - 4y^3 + 2t = 6y^2t - 4y^3 + 2t$$

– MAMY DO CZYNIENIA Z RÓWNANIEM ZUPEŁNYM. MUSIMY ZNALEŹĆ $F(t,y)$ Z WARUNKÓW

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = P(t,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(t,y) \end{cases}$$

– ZAPISZMY WARUNEK PIERWSZY :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2y^3t - y^4 + 2ty \quad \Big/ \int(\,)\,dt$$

$$F(t,y) = \int\left(2y^3t - y^4 + 2ty\right)dt = 2y^3\cdot\frac{1}{2}t^2 - y^4\cdot t + 2\cdot\frac{1}{2}t^2y + C(y)$$

$$F(t,y) = y^3t^2 - y^4t + t^2y + C(y)$$

– POZOSTAJE ZNALEŹĆ FUNKCJĘ $C(y)$ Z DRUGIEGO WARUNKU:

$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(t,y)$ ALE MAMY JUŻ $F(t,y)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3t^2 - y^4t + t^2y + C(y)\right) = 3y^2t^2 - 4y^3t + t^2 + C'(y), \text{ A ZATEM}$$

$$3y^2t^2 - 4y^3t + t^2 + C'(y) = 3y^2t^2 - 4y^3t + t^2$$

$$C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C_1, \text{ CZYLI } F(t,y) = y^3t^2 - y^4t + t^2y + C_1$$

– ZAPISUJEMY ROZWIĄZANIE $y^3t^2 - y^4t + t^2y + C_1 = C_2 \Rightarrow \underline{y^3t^2 - y^4t + t^2y = C}$