Szeregi funkcyjne i potęgowe

Definicja 1 **Ciągiem funkcyjnym** *nazywamy odwzorowanie zbioru liczb naturalnych w zbiór funkcji określonych na danym przedziale I. Wartość tego odwzorowania dla ustalonej liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu funkcyjnego i piszemy $f_n(x)$.*

Ciąg funkcyjny oznaczamy symbolem (f_n).

Definicja 2 *Mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n) określony na zbiorze I jest* **zbieżny** *do granicy f, jeśli dla każdego $x \in I$ ciąg liczbowy $(f_n(x))$ jest zbieżny do liczby $f(x)$. Piszemy wtedy $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Ponadto, mówimy, że ciąg funkcyjny (f_n) określony na zbiorze I jest jednostajnie zbieżny do granicy f, jeśli zbieżność jest w pewnym sensie równomierna dla każdego $x \in I$

Niech dany będzie ciąg funkcyjny (f_n) określony na zbiorze I.

Definicja 3 *Ciąg sum postaci*

$$S_1(x) = f_1(x)\ ,\ S_2(x) = f_1(x)+f_2(x)\ ,\ S_3(x) = f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)\ ,\ \ldots S_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\ ,\ \ldots$$

nazywamy **ciągiem sum częściowych** *ciągu (f_n).*

W celu skrócenia notacji piszemy

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\ .$$

Definicja 4 *Niech (f_n) będzie ciągiem funkcyjnym określonym na zbiorze I, a $(S_n(x))$ jego ciągiem sum częściowych. Jeśli ciąg $(S_n(x))$ jest zbieżny dla każdego $x \in I$, to mówimy, że ciąg $(S_n(x))$ jest* **sumowalny**. *W tym przypadku granicę $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ oznaczamy symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Wyrażenie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy* **szeregiem funkcyjnym**.

Jeśli ciąg $(S_n(x))$ jest sumowalny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nazywamy **zbieżnym** *a funkcję $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ nazywamy* **sumą szeregu** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. *Jeśli ciąg $(S_n(x))$ jest zbieżny jednostajnie, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nazywamy* **zbieżnym jednostajnie**. *Jeśli ciąg (f_n) nie jest sumowalny, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nazywamy* **rozbieżnym**.

Definicja 5 *Szereg funkcyjny postaci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

nazywamy **szeregiem potęgowym**.

Szeregi potęgowe są uogólnionymi wielomianami (są wielomianami stopnia ∞). Podstawowym pytaniem jest pytanie o zbieżność szeregu potęgowego. W odróżnieniu od szeregów liczbowych (szereg liczbowy jest zbieżny lub rozbieżny), szeregi potęgowe mogą być zbieżne dla pewnych x, a dla innych rozbieżne. Zatem pytanie o zbieżność szeregu potęgowego sprowadza się do pytania o dokładny zakres zmiennej x, dla której szereg jest zbieżny oraz zakres zmiennej x, dla której szereg jest rozbieżny.

Przykład

1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ jest zbieżny dla każdego $x \in (-1, 1)$.

3. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ jest zbieżny jedynie dla $x = 0$.

Liczbę R nazywamy **promieniem zbieżności** szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ jeśli jest kresem górnym (najmniejszym górnym ograniczeniem) zbioru $\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{jest zbieżny}\}$. Innymi słowy, jeśli R jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego, to jest on zbieżny dla każdego $x \in (-R, R)$ oraz jest rozbieżny dla każdego $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$. Przyjmujemy ponadto, że $R = 0$ gdy szereg potęgowy jest zbieżny tylko dla $x = 0$ oraz $R = \infty$ gdy szereg potęgowy jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. W powyższych przykładach promień zbieżności jest równy odpowiednio: 0, 1, ∞.

Do wyznaczania promienia zbieżności wykorzystujemy kryterium ilorazowe i pierwiastkowe.

Twierdzenie 1 *Jeśli dla szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ mamy*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g \quad lub \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g \ ,$$

to promień zbieżności tego szeregu jest równy $R = 1/g$. Przyjmujemy ponadto, że $R = 0$ gdy $g = \infty$ oraz $R = \infty$ gdy $g = 0$.

Przykład Wyznacz promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n (n+1)^2} x^n$.

Mamy $a_n = \frac{n^2}{2^n (n+1)^2}$ oraz

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n (n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(n+1)^2}} = \frac{1}{2} \ ,$$

zatem $R = 2$. Oznacza to, że szereg potęgowy jest zbieżny dla $x \in (-2, 2)$.

Przykład Wyznacz promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^n}{n!} x^n$.

Mamy $a_n = \frac{3^n n^n}{n!}$ oraz

$$g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^{n+1} (n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n n^n} \right| = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = 3e \ ,$$

zatem $R = 1/3e$. Oznacza to, że szereg potęgowy jest zbieżny dla $x \in (-1/3e, 1/3e)$.

Postawmy teraz problem odwrotny do rozważanego dotychczas: mamy zadaną funkcję spełniającą pewne warunki, należy wyznaczyć szereg potęgowy, którego sumą jest ta funkcja.

Twierdzenie 2 (Taylora) *Jeśli funkcja f ma w pewnym otoczeniu punktu x_0 pochodne dowolnego rzędu, to istnieje liczba $\theta \in (0, 1)$ taka, że*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} + R_n \ ,$$

gdzie

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^n \ .$$

Powyższy wzór zwany jest **wzorem Taylora**, R_n - **resztą** we wzorze Taylora. W przypadku gdy $x_0 = 0$, otrzymujemy **wzór Maclaurina**

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + R_n \ ,$$

gdzie

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta x)x^n \ .$$

Jeśli reszta R_n we wzorze Maclaurina dąży do 0 przy $n \to \infty$, to otrzymujemy **szereg Taylora** funkcji f, czyli poszukiwane rozwinięcie funkcji f w szereg potęgowy.

Twierdzenie 3 *Jeśli dla każdego x należącego do pewnego otoczenia U punktu 0 mamy $R_n \to 0$, to $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ dla każdego $x \in U$.*

Z twierdzenia tego wynika, że współczynniki rozwinięcia funkcji f w szereg potęgowy są zawsze postaci $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

Przykład Wyznacz szereg Taylora funkcji $f(x) = e^x$.

Mamy $f^{(n)}(x) = e^x$, zatem $f^{(n)}(0) = 1$, $R_n = \frac{1}{n!} e^{\theta x} x^n \to 0$ gdy $n \to \infty$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Stąd

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \ , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Przykład Wyznacz szereg Taylora funkcji $f(x) = \ln(1+x)$.

Mamy $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -1(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$ i ogólnie

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2) \cdot \ldots \cdot (-n+1)(1+x)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \ .$$

Zatem $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $R_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}(1+\theta x)^{-n} x^n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n \to 0$ gdy $n \to \infty$ dla każdego $x \in (-1, 1)$. Stąd

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \dots \ , \ x \in (-1, 1).$$

W podobny sposób można uzyskać inne tego typu wzory, np.

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + \ , \ x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + \ , \ x \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$