Płaszczyzny i proste w $\mathbb{R}^3$ - ćwiczenia

Zadanie 1. Znaleźć równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A = (1, 3, -1)$, $B = (2, 0, 4)$, $C = (3, 1, 0)$.

Zacznijmy od równania parametrycznego, do którego potrzebujemy punktu P_0 należącego do płaszczyzny i dwóch wektorów niewspółliniowych rozpinających płaszczyznę $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$(równoległe do płaszczyzny ale nie równoległe względem siebie). Wybierzmy punkt $P_0 = A = (1, 3, -1)$, a następnie skonstruujmy wektor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -3, 5)$ oraz $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (2, -2, 1)$. Zapiszmy równanie parametryczne płaszczyzny:

$$\pi : \begin{cases} x &= 1 + s + 2t \\ y &= 3 - 3s - 2t \quad t, s \in \mathbb{R}. \\ z &= -1 + 5s + t \end{cases}$$

Przejdźmy teraz do równania normalnego płaszczyzny, do którego potrzebujemy punktu P_0 należącego do płaszczyzny i wektora normalnego $\overrightarrow{n}$ (prostopadłego do płaszczyzny). Podobnie jak wcześniej wybierzmy $P_0 = A = (1, 3, -1)$. Skoro wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{u}$ rozpinają płaszczyznę, to wynik ich iloczynu wektorowego będzie wektorem prostopadłym do nich, a zarazem prostopadłym do naszej płaszczyzny. Możemy zatem przyjąć $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Obliczamy rozwijając wyznacznik względem pierwszego wiersza $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (1, -3, 5) \times (2, -2, 1) = \overrightarrow{i}(-10 + 3) - \overrightarrow{j}(10 - 1) + \overrightarrow{k}(-6 + 2) = -7\overrightarrow{i} - 9\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k} = (-7, -9, -4) = \overrightarrow{n}$. W takim razie, równanie normalne płaszczyzny przyjmie postać:

$$\pi : \; -7(x - 1) - 9(y - 3) - 4(z + 1) = 0,$$

a stąd równanie ogólne przyjmie postać:

$$\pi : \; -7x - 9y - 4z + 30 = 0.$$

Zadanie 2. Znaleźć równanie kierunkowe i parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $P = (1, 2, 3)$ i $Q = (3, 2, 1)$.

W obydwu przypadkach szukamy punktu p_0 należącego do prostej i wektora kierunkowego $\overrightarrow{v}$ (równoległego) tej prostej. Skoro prosta przechodzi przez punkty P i Q, to jest równoległa do wektora $\overrightarrow{PQ}$, który ma współrzędne: $\overrightarrow{PQ} = (3, 2, 1) - (1, 2, 3) = (2, 0, -2)$. Możemy zatem przyjąć $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{PQ} = 1/2(2, 0, -2) = (1, 0, -1)$. Wybierzmy dodatkowo $P_0 = P = (1, 2, 3)$. Równanie kierunkowe prostej przyjmie postać:

$$l : \; \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 3}{-1}.$$

Uwaga. Zwróćmy uwagę na 0 w mianowniku. Równanie parametryczne przyjmie postać:

$$l : \begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= 2 \\ z &= 3 - t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 3. Sprawdzić, czy punkt $A = (1, -2, 5)$ należy do prostej $l : \; \dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y + 2}{0} = \dfrac{z - 5}{-3}$.

Zapiszmy równanie parametryczne naszej prostej:

$$l : \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= -2 \\ z &= 5 - 3t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając do tego równania $t = 0$ otrzymujemy współrzędne punktu $A = (1, -2, 5)$, a zatem punkt P_0 należy do prostej l.

Zadanie 4. Sprawdzić, czy prosta $l:\ \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= -2t \\ z &= 3+3t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$, **jest zawarta w płaszczyźnie** $\pi:\ 3x+3y+z-6=0$.

Prosta będzie zawarta w płaszczyźnie, jeżeli będzie spełniała jej równanie, zatem podstawiamy równanie parametryczne prostej l do równania ogólnego płaszczyzny π: $3(1+t)+3(-2t)+(3+3t)-6=0 \Rightarrow 3+3t-6t+3+3t-6=0 \Rightarrow 0=0$. Oznacza to, że równość zachodzi dla dowolnego $t\in\mathbb{R}$, a zatem prosta l jest zawarta w płaszczyźnie π.

Zadanie 5. Znaleźć odległość dwóch prostych równoległych $l_1:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ **i** $l_2:\ \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-3}{2}$**.**

Posłużymy się następującą metodą: wyznaczymy równanie płaszczyzny π prostopadłej do obydwu prostych, na przykład przechodzącej przez dowolny punkt P_1 na prostej l_1. Następnie wyznaczymy punkt P_2 przecięcia tej płaszczyzny z prostą l_2 i na koniec obliczymy długość wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$, która będzie równa odległości pomiędzy prostymi równoległymi. Wektor normalny płaszczyzny π jest równoległy do wektora kierunkowego $\overrightarrow{v_1}$ prostej l_1 (jak również do wektora kierunkowego $\overrightarrow{v_2}$ prostej l_2). Możemy zatem przyjąć $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{v_1}=(1,2,-1)$, a za punkt P_0 płaszczyzny π przyjmujemy punkt P_1 prostej l_1: $P_0=(1,-1,0)$. Równanie ogólne płaszczyzny otrzymamy z równania normalnego:

$$\pi:\ (x-1,y+1,z)\circ(1,2,-1)=0,$$

a stąd

$$\pi:\ x+2y-z+1=0.$$

Punkt P_2, jest punktem przecięcia prostej l_2 z płaszczyzną π, a zatem musi spełniać zarówno równanie prostej, jak i płaszczyzny skąd dostajemy układ równań warunków:

$$\begin{cases} \frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-3}{2} \\ x+2y-z+1=0 \end{cases},$$

który jest spełniony przez punkt $P_2=(0,1,3)$. Szukaną odległość dostaniemy jako długość wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d(l_1,l_2)=\|\overrightarrow{P_1P_2}\|=\|(0,1,3)-(1,-1,0)\|=\|(-1,2,3)\|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

Zadanie 6. Obliczyć miarę kąta między prostą $l:\ \frac{x+2}{-3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$ **i płaszczyzną** $\pi:\ 2x-3y-5=0$**.**

Zgodnie ze wzorem, miara kąta pomiędzy prostą o wektorze kierunkowym $\overrightarrow{v}$ i płaszczyzną o wektorze normalnym $\overrightarrow{n}$ wyraża się wzorem:

$$\angle(l,\pi)=\arcsin\frac{|\overrightarrow{n}\circ\overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{n}\|\cdot\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Podstawiając $\overrightarrow{v}=(-3,-2,1)$ i $\overrightarrow{n}=(2,-3,0)$ dostajemy:

$$\angle(l,\pi)=\arcsin\frac{|(2,-3,0)\circ(-3,-2,1)|}{\|(2,-3,0)\|\cdot\|(-3,-2,1)\|}=\arcsin\frac{-6+6+0}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{9+4+1}}=\arcsin\frac{0}{\sqrt{182}}=\arcsin 0=0[rad].$$

Oznacza to, że prosta l i płaszczyzna π są równoległe.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Napisać równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (1, 3, -2)$ i przez oś Oy.

2. Obliczyć w jakim punkcie płaszczyzna $\pi : \begin{cases} x = -1 + 2s - t \\ y = 2 + 3s + 2t \\ z = -3 - s + t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$, przecina oś $0x$.

3. Zbadać, czy proste $l_1 : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ i $l_2 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$ mają punkt wspólny.

4. Wyznaczyć odległość punktu $P = (3, 6, 1)$ od płaszczyzny $\pi : \ x = 1 + 2s + 2t, y = 2s - t, z = t, \ s, t \in \mathbb{R}$.

5. Obliczyć kąt między prostymi $l_1 : \ x = 2t, y = 1 - t, z = t, t \in \mathbb{R}$ oraz $l_2 : \ x = 1 - 3s, y = 2 + s, z = -3, s \in \mathbb{R}$.

Odpowiedzi. 1. $2x + z = 0$; 2. $(-28/5, 0, 0)$; 3. Tak, $P = (-1, 1, 7)$. 4. $7/\sqrt{11}$ 5. $\arccos \dfrac{7}{\sqrt{60}}$;