

Zadania

Obliczyć pochodne cząstkowe względem każdej zmiennej występującej w danej funkcji (zad. 1.45 - 1.66):

$$1.45. u = xy^2z^3 - y \sin z. \quad 1.46. u = x\sqrt{y} - e^x \ln y. \quad 1.47. z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

$$1.48. z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha}. \quad 1.49. l = \rho e^{\pi \cos \varphi}.$$

$$1.50. u = \sin(x^2) \sqrt{\operatorname{tg} y} - e^{\sin z} \cos^2 y. \quad 1.51. u = \sqrt{x^4 + \cos^2 y} + e^{\sqrt{z}} \sin y.$$

$$1.52. u = z^4(5xy^2 - 3yz^2)^{20}. \quad 1.53. u = x^{\sqrt{y}}.$$

$$1.54. u = (xy)^x. \quad 1.55. u = x^{yz}.$$

$$1.56. z = (1 + xy)^y. \quad 1.57. z = \ln(x + \ln y).$$

$$1.58. z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}). \quad 1.59. u = \ln \sin(x - 2t).$$

$$1.60. u = (\sin x)^{\ln y}. \quad 1.61. u = x^{\frac{1}{y}} z.$$

$$1.62. u = x^{y \operatorname{arctg} z}. \quad 1.63. u = (y \sin^2 x + 5)^{\sqrt{y}}.$$

$$1.64. u = 2x^3y - 5x^2y^3 + x \cos 2y. \quad 1.65. u = \sqrt{xy}(3x + 2z)^{\sqrt{yz}}.$$

$$1.66. u = (\sin x)^{(\sin y)^{\sin z}}, \quad \sin x > 0, \quad \sin y > 0.$$

$$1.67. \text{ Wykazać, że funkcja } u = \ln(e^x + e^y) \text{ spełnia równanie } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1.$$

$$1.68. \text{ Wykazać, że funkcja } u = x^y y^x \text{ spełnia równanie } x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y + \ln u) u.$$

$$1.69. \text{ Wykazać, że funkcja } u = e^{x/y^2} \text{ spełnia równanie } 2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$1.70. \text{ Wykazać, że funkcja } u = x + \frac{x-y}{y-z} \text{ spełnia równanie } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

$$1.71. \text{ Wykazać, że funkcja } u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ spełnia równanie } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

1.72. Wykazać, że w równaniu Clapeyrona $pv = RT$ iloczyn pochodnych cząstkowych $\partial p/\partial v$, $\partial v/\partial T$ i $\partial T/\partial p$ równa się -1 (związek ten jest bardzo ważny w termodynamice).

1.73. Z badać, z jaką prędkością zmienia się objętość stożka a) przy zmianie wysokości h ; b) przy zmianie promienia podstawy R .

1.74. Obliczyć, pod jakim kątem przecinają się krzywe otrzymane przez przecięcie powierzchni $z = x^2 + \frac{y^2}{6}$ i $z = \frac{x^2 + y^3}{3}$ płaszczyzną $y = 2$.