

Całka powierzchniowa zorientowana - ćwiczenia

Zadanie 1. Korzystając z Twierdzenia 2 z wykładu obliczyć podane całki.

- (a) $\iint_{S^+} 3x \, dydz - y \, dzdx + z \, dxdy$, gdzie S^+ jest częścią powierzchni $z = 9 - x^2 - y^2$, $x^2 + y^2 \leq 9$;
- (b) $\iint_{S^+} y \, dydz - 2x \, dzdx - z \, dxdy$, gdzie S^+ jest półsferyą $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;
- (c) $\iint_{S^+} x \, dydz + y \, dzdx + z \, dxdy$, gdzie S^+ jest częścią powierzchni stożkowej $z = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, dla $x^2 + y^2 \leq 4$;
- (d) $\iint_{S^+} xz \, dydz + yz \, dzdx + xy \, dxdy$, gdzie S^+ jest częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dla $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;
- (e) $\iint_{S^-} (y - z) \, dydz + (z - x) \, dzdx + (x - y) \, dxdy$, gdzie S^- jest częścią powierzchni walcowej $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

Rozwiązanie przykładu (a):

Mamy $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, skąd $f'_x = -2x$ i $f'_y = -2y$. Korzystamy z Twierdzenia 2 i wstawiamy w miejsce z w funkcjach P , Q , R wyrażenie $9 - x^2 - y^2$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} 3x \, dydz - y \, dzdx + z \, dxdy &= \iint_D [3x \cdot (2x) - y \cdot (2y) + (9 - x^2 - y^2) \cdot 1] \, dxdy \\ &= \iint_D (5x^2 - 3y^2 + 9) \, dxdy = I \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy całkę podwójną po obszarze D , który jest rzutem prostokątnym płata S na płaszczyznę xOy . Zatem jest to okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 3$. Korzystając ze współrzędnych biegunowych ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r \in [0, 3]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$) mamy

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 (5r^2 \cos^2 \varphi - 3r^2 \sin^2 \varphi + 9)r \, dr \right] d\varphi.$$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej ($\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$) i redukując wyrazy podobne otrzymujemy

$$I = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 (8r^3 \cos^2 \varphi - 3r^3 + 9r) \, dr \right] d\varphi.$$

Korzystając ze wzoru na cosinus podwojonego kąta $\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$, wyliczamy $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}$ i podstawiamy do wyrażenia podcałkowego.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 \left(8r^3 \left(\frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \right) - 3r^3 + 9r \right) \, dr \right] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^3 (4r^3 \cos 2\varphi + r^3 + 9r) \, dr \right] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[[r^4]_0^3 \cdot \cos 2\varphi + \frac{1}{4} [r^4]_0^3 + \frac{9}{2} [r^2]_0^3 \right] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[81 \cos 2\varphi + \frac{81}{4} + \frac{81}{2} \right] d\varphi = 81 \int_0^{2\pi} \left[\cos 2\varphi + \frac{3}{4} \right] d\varphi \\ &= 81 \left(\frac{1}{2} [\sin 2\varphi]_0^{2\pi} + \frac{3}{4} [\varphi]_0^{2\pi} \right) = 81 \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 2\pi \right) = \frac{243}{2} \pi. \end{aligned}$$

Rozwiązanie przykładu (c):

Mamy $z = f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, skąd $f'_x = -\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$ i $f'_y = -\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$. Korzystamy z Twierdzenia 2 i wstawiamy w miejsce z w funkcjach P, Q, R wyrażenie $1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} x \, dydz + y \, dzdx + z \, dxdy &= \iint_D \left[x \cdot \left(\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right) + y \cdot \left(\frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \right) + \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \right) \cdot 1 \right] dxdy \\ &= \iint_D \left[\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \right] dxdy = \iint_D 1 dxdy = |D|. \end{aligned}$$

Obszar D jest rzutem prostopadłym płata S na płaszczyznę xOy . Przyjmując w równaniu płata $z = 0$ widzimy, że jest to okrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 2$; jego pole równe jest 4π . Zatem

$$\iint_{S^+} x \, dydz + y \, dzdx + z \, dxdy = |D| = 4\pi.$$

Zadanie 2.

(a) Oblicz całkę powierzchniową $\iint_{S^+} x \, dydz + y \, dzdx + z^2 \, dxdy$, gdzie S^+ jest płatem paraboloidy hiper-

bolicznej przedstawionej parametrycznie:
$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = 2uv \end{cases} \quad \text{dla } u^2 + v^2 \leq 1.$$

(b) Oblicz całkę powierzchniową $\iint_{S^+} -y \, dydz + x \, dzdx + (1 + z^2) \, dxdy$, gdzie S^+ jest płatem powierzchni

śrubowej danej równaniem parametryczne
$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1 \text{ oraz } -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Rozwiązanie przykładu (a):

W tym przykładzie musimy skorzystać z Twierdzenia 1. Mamy:

$$\begin{aligned} x'_u &= 1, \quad y'_u = 1, \quad z'_u = 2v, \\ x'_v &= 1, \quad y'_v = -1, \quad z'_v = 2u \end{aligned}$$

oraz

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 2u + 2v, \quad B = \begin{vmatrix} 2v & 2u \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2v - 2u, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} x \, dydz + y \, dzdx + z^2 \, dxdy &= \iint_D \left[(u+v)(2u+2v) + (u-v)(2v-2u) + (2uv)^2(-2) \right] dudv \\ &= \iint_D \left[(2u^2 + 4uv + 2v^2) - (2u^2 - 4uv + 2v^2) - 8u^2v^2 \right] dudv \\ &= \iint_D \left[8uv - 8u^2v^2 \right] dudv = 8 \iint_D \left[uv - u^2v^2 \right] dudv = I. \end{aligned}$$

Ponieważ $u^2 + v^2 \leq 1$ zatem obszar D jest kołem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 1$. Korzystając ze współrzędnych biegunowych ($u = r \cos \varphi, v = r \sin \varphi, r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi]$) mamy

$$I = 8 \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (r^2 \cos \varphi \sin \varphi - r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi) r \, d\varphi \right] dr.$$

Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta: $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ oraz cosinus podwojonego kąta $\cos 2\varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi$, skąd $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi$ (zatem $\sin^2 2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\varphi$). Mamy

$$\begin{aligned} I &= 8 \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^3 \sin 2\varphi - \frac{1}{4} r^5 \sin^2 2\varphi \right) d\varphi \right] dr \\ &= 8 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} r^3 \left(-\frac{1}{2} \cos 2\varphi \right)_0^{2\pi} - \frac{1}{4} r^5 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) d\varphi \right] dr \\ &= 8 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} r^3 \cdot 0 - \frac{1}{4} r^5 \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right)_0^{2\pi} \right] dr \\ &= 8 \int_0^1 \left[-\frac{1}{4} r^5 \left(\frac{1}{2} \cdot 2\pi - \frac{1}{8} \cdot 0 \right) \right] dr = 8 \int_0^1 \left[-\frac{1}{4} r^5 \pi \right] dr \\ &= -2\pi \int_0^1 r^5 dr = -2\pi \cdot \frac{1}{6} [r^6]_0^1 = -\frac{1}{3} \pi. \end{aligned}$$