

ROZWIĄZANIE RÓZNICZKOWE - PRZYKŁADY, CAŁCZENIA

(1) ROZWIĄZAC' ZAGADNIENIE POCZĄTKOWE $y' = \frac{y}{t} - \left(\frac{y}{t}\right)^2, y(1) = 1$

ZACZYNAJEMY OD ROZWIĄZANIA OGÓLNEGO:

- ROZPOZNAJEMY TYP RÓWNIANIA : $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$

- WYKONUJEMY PODSTAWIENIE :

$$u = \frac{y}{t} \quad | \cdot t$$

$$y = u \cdot t \quad | ()'$$

$$y' = u' \cdot t + u \cdot 1$$

PODSTAWIAMY DO RÓWNIANIA

$$u' \cdot t + u = u - u^2$$

$$u' \cdot t = -u^2$$

$$\frac{du}{dt} \cdot t = -u^2 \quad - \text{ROZDZIELAMY ZMIENNE}$$

$$\frac{du}{dt} \cdot t = -u^2 \quad | : (-u^2) \quad | : t \quad | \cdot dt$$

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{1}{t} dt \quad | \int$$

$$\int -\frac{du}{u^2} = \int \frac{dt}{t}$$

$$\frac{1}{u} = \ln|t| + C \Rightarrow u = \frac{1}{\ln|t| + C} \quad (\text{PAMIĘTAMY, ŻE } u = \frac{y}{t})$$

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{\ln|t| + C} \Rightarrow y = \frac{t}{\ln|t| + C} \quad - \text{ROZWIĄZANIE OGÓLNE}$$

- WŁAZGLĘDNIAMY WARUNEK POCZĄTKOWY $y(t=1) = 1$

$$1 = \frac{1}{\ln|1| + C} \Rightarrow 1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$$

$$y = \frac{t}{\ln|t| + 1} \quad - \text{ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE}$$

SPRAWDZAMY, ŻE $u = 0$ (CZYLI $y = 0$)

JEST ROZWIĄZANIEM SZCZEGÓLNYM

$y = 0$ - ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE

$$y' = (0)' = 0 - 0$$