1.2 Współrzędne sferyczne

Przy obliczaniu całki potrójnej można uprościć rachunki wprowadzając nowe zmienne; tu ograniczamy się tylko do współrzędnych sferycznych.

Współrzędne sferyczne to układ trzech zmiennych r, φ i θ identyfikujących położenie punktu P w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, które mają następującą interpretację:

- r - promień wodzący punktu P, czyli odległość P od początku układu O,
- φ - miara kąta między rzutem prostokątnym wektora $\overrightarrow{OP}$ na płaszczyznę OXY a osią OX,
- θ - miara kąta między wektorem $\overrightarrow{OP}$ a jego rzutem na płaszczyznę OXY.

Z powyższej interpretacji wynika, że

$$r \geqslant 0\ ,\ \ \varphi \in (-\pi, \pi]\ ,\ \ \theta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

Przejście od współrzędnych sferycznych r, φ, θ do współrzędnych kartezjańskich x, y, z realizuje odwzorowanie

$$\Phi : \begin{cases} x &=& r\cos\varphi\cos\theta \\ y &=& r\sin\varphi\cos\theta \\ z &=& r\sin\theta\ . \end{cases}$$

Wygodna jest następująca analogia współrzędnych sferycznych i współrzędnych geograficznych. Niech P będzie punktem leżącym na kuli ziemskiej (rozumianej jako idealna kula). Wtedy zmienne φ i θ oznaczają:

- φ - długość geograficzną, przy czym zamiast mówić, że $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mówimy o długości wschodniej gdy $\varphi \in (0, \pi]$ lub zachodniej gdy $\varphi \in (-\pi, 0)$;
- θ - szerokość geograficzną, przy czym zamiast mówić, że $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mówimy o szerokości północnej gdy $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ lub południowej gdy $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Jakobian przekształcenia Φ jest równy $J(r, \varphi, \theta) = r^2\cos\theta$.

Twierdzenie 1 *Jeśli f jest ciągła w V, który jest obrazem zbioru Ω przy odwzorowaniu Φ, to*

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_\Omega f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)r^2\cos\theta drd\varphi d\theta,$$

Przykład.
Obliczyć całkę

$$\iiint_V zdxdydz,$$

gdzie obszar V jest górną połową kuli o równaniu $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$.

Podstawiając do opisu zbioru V współrzędne sferyczne mamy

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (r\cos\varphi\cos\theta)^2 + (r\sin\varphi\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \\ &= r^2(\cos\theta)^2\left[(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2\right] + r^2(\sin\theta)^2 \\ &= r^2\left[(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right] = r^2\ , \end{aligned}$$

czyli otrzymujemy warunek $r^2 \leqslant 4$, co pociąga za sobą $r \in [0, 2]$.
Rozważamy górną połowę kuli, to oznacza, że $z \geqslant 0$. A zatem mamy warunek $r\sin\theta \geqslant 0$, skąd $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned}\iiint_V z dx dy dz &= \iiint_\Omega r\sin\theta\cdot r^2\cos\theta dr d\varphi\theta \\ &= \int_0^2\left[\int_{-\pi}^{\pi} r^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\right)d\theta\right]d\varphi dr\end{aligned}$$

Stosując podstawienie $\sin\theta = t$ mamy

$$\begin{aligned}\iiint_V z dx dy dz &= \int_0^2\left[\int_{-\pi}^{\pi} r^3\left(\int_0^1 t\right)dt\right]d\varphi dr = \int_0^2\left[\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{1}{2}r^3\right]d\varphi dr \\ &= \int_0^2\tfrac{r^3}{2}\cdot 2\pi dr = \pi\int_0^2 r^3 dr = 4\pi.\end{aligned}$$

Przykład.
Obliczyć całkę

$$\iiint_V (x^2+y^2)dx dy dz,$$

gdzie obszar V jest kulą o równaniu $x^2+y^2+z^2 \leqslant z$.

Korzystając z poprzedniego zadania wiemy, że $x^2+y^2+z^2 = r^2$. Z warunku opisującego zbiór wynika, że $r^2 \leqslant r\sin\theta$, a to jest równoważne $r \leqslant \sin\theta$. Ponieważ $r \geqslant 0$, zatem otrzymujemy dodatkowo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ponadto, $\varphi \in [-\pi,\pi]$. Zatem całka przyjmuje postać

$$\begin{aligned}\iiint_V (x^2+y^2)dx dy dz &= \iiint_\Omega\left[(r\cos\varphi\cos\theta)^2+(r\sin\varphi\cos\theta)^2\right]\cdot r^2\cos\theta dr d\varphi\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\sin\theta} r^4\cos^3\theta dr\right)d\varphi\right]d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\tfrac{1}{5}\sin^5\theta\cos^3\theta d\varphi\right]d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\tfrac{1}{5}\sin^5\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\right]d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\tfrac{1}{5}\sin^5\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta\right]d\theta.\end{aligned}$$

Wprowadzając podstawienie $\sin\theta = t$ całka przyjmuje postać

$$\iiint_V (x^2+y^2)dx dy dz = \tfrac{2\pi}{5}\int_0^1\left(t^5-t^7\right)dt = \tfrac{2\pi}{5}\left(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{\pi}{60}\ .$$