Algorytmy i Struktury Danych - 2. rok Inżynierii i Analizy Danych

Laboratoria 4. Rekursja i jej usuwanie

Rekurencja jest to zależność zdefiniowana poprzez odwołanie się do samej siebie (dla innej wartości argumentu).

Rekursywne wywoływanie procedury jest kosztowne. Wymaga wykorzystania pamięci (stosu) w celu umieszczenia tam wartości zmiennych, oraz czasu związanego z odkładaniem ich na stosie. Z punktu widzenia całego algorytmu nie musi to jednak być koszt najistotniejszy i nie musi wiązać się ze zwiększeniem złożoności algorytmu. Z tego względu choć unikanie rekursji jest wskazane ze względu na szybkość działania algorytmu, to szczególnie w sytuacjach w których problem jest typowo rekurencyjny, wykorzystanie rekursji nie jest błędem.

Zadanie 1.
W zagadnieniach matematycznych pojawia się czasem funkcja silni podwójnej zdefiniowanej jak poniżej:

$$n!! = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad n = 1 \\ n * ((n-2)!!) & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases},$$

czyli będącą iloczynem liczb całkowitych nie większych od n o tej samej parzystości co n. Napisz funkcję rekursywnie wyznaczającą wartość podwójnej silni, dla zadanej wartości n.

Zapisz postać rekurencyjną (wzór) wyznaczający wartości silni potrójnej analogicznie wyznaczającą iloczyn liczb całkowitych nie większych niż n, o tej samej reszcie z dzielenia przez 3 co dla n. Napisz funkcję która rekursywnie wyznaczy tę wartość.

Zadanie 2.
Dany jest ciąg określony rekurencyjnie:

$$a_n = \begin{cases} 4 & \text{dla} \quad n = 1 \\ \frac{a_{n-1}}{l} & \text{dla} \quad n = 3l \\ \frac{a_{n-1}}{l+1} & \text{dla} \quad n = 3l+1 \\ \frac{a_{n-1}}{l^2+1} & \text{dla} \quad n = 3l+2 \end{cases}$$

Napisz funkcję rekursywnie wyznaczającą n-ty wyraz tego ciągu.

Zadanie 3.
Ciąg a_n zdefiniowany jest wzorem:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 1 \\ a_{n-1} \cdot n + 2 & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$$

Napisz funkcję rekursywnie wyznaczającą n-ty wyraz tego ciągu

Zadanie 4.
Ciąg a_n dany jest wzorem:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 1 \\ 2 & \text{dla} \quad n = 2 \\ 2a_{n-1} + a_{n-2} & \text{dla} \quad n > 2 \end{cases}$$

Napisz rekursywną funkcję wyznaczającą <u>w sposób optymalny</u> wartość n-tego wyrazu tego ciągu.

Zadanie 5.
Wartość funkcji e^x można przybliżać za pomocą następującego wzoru:

$$e^x \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!},$$

którego składniki sumy da się wyrazić wzorem rekurencyjnym

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ a_{n-1} \cdot \frac{x}{n} & \text{dla} \quad n > 0 \end{cases}$$

Napisz program pobierający od użytkownika wartość x, oraz dokładność ε, oraz zawierający rekursywną funkcję wyznaczającą wartość e^x z zadanym przybliżeniem ε.
WSKAZÓWKA: $\frac{|e^x - \sum_{i=0}^{n} a_i|}{e^x} \leq a_n$ dla $x \geq 0$ i $|e^x - \sum_{i=0}^{n} a_i| \leq a_n$ dla $x < 0$.

Zadanie 6.
Wartość funkcji $\sin x$ można przybliżać za pomocą następującego wzoru:

$$\sin x \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!},$$

którego składniki sumy da się wyrazić wzorem rekurencyjnym

$$a_n = \begin{cases} x & \text{dla} \quad n = 0 \\ a_{n-1} \cdot \frac{-x^2}{2n(2n+1)} & \text{dla} \quad n > 0 \end{cases}$$

Napisz program pobierający od użytkownika wartość x, oraz dokładność ε, oraz zawierający rekursywną funkcję wyznaczającą wartość $\sin x$ z zadanym przybliżeniem ε.
WSKAZÓWKA: $|\sin x - \sum_{i=0}^{n} a_i| \leq a_n$.

Zadanie 7.
Symbol Newtona $\binom{n}{k}$ można wyznaczać rekurencyjnie z następującego wzoru:

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad k = 0 \\ a_{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k} & \text{dla} \quad k > 0 \end{cases}$$

Napisz funkcję rekursywnie wyznaczającą wartość $\binom{n}{k}$ dla zadanych przez użytkownika wartości n i k.

Zadanie 8.
Napisz procedurę, która rekursywnie dla zadanych przez użytkownika naturalnej wartości n i rzeczywistej wartości x w sposób <u>optymalny</u> wyznaczy wartość wielomianu zdefiniowanego rekurencyjnie

$$T_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ x & \text{dla} \quad n = 1 \\ 2x \cdot T_{n-1}(x) \cdot T_{n-2}(x) & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$$

Zadanie 9.
Napisz funkcję rekursywną wyznaczającą w sposób <u>optymalny</u> dla zadanej wartości n, n-ty wyraz ciągu zadanego wzorem rekurencyjnym:

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{dla} \quad n = 1 \\ 3 & \text{dla} \quad n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & \text{dla} \quad n > 2 \end{cases}$$

Zadanie 10.
Napisz funkcję rekursywną wyznaczającą w sposób optymalny dla zadanej wartości n, n-ty wyraz ciągu zadanego wzorem rekurencyjnym:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad n = 1 \\ 2 & \text{dla} \quad n = 2 \\ 2a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} & \text{dla} \quad n > 2 \end{cases}$$

Zadanie 11.
Napisz procedurę, która rekursywnie dla zadanych przez użytkownika naturalnej wartości n i rzeczywistej wartości x w sposób optymalny wyznaczy wartość wielomianu Czebyszewa zdefiniowanego rekurencyjnie

$$T_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ x & \text{dla} \quad n = 1 \\ 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$$

Zadanie 12.
Napisz procedurę, która rekursywnie dla zadanych przez użytkownika naturalnej wartości n i rzeczywistej wartości x w sposób optymalny wyznaczy wartość wielomianu Lagrange'a zdefiniowanego rekurencyjnie

$$P_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = -1 \\ 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ \frac{2n-1}{n} x \cdot P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x) & \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$$

Zadanie 13.
Stosując metodę "Divide and Conquer", do podziału tablicy na 2 połowy w każdym kroku rekursywnym, wyznacz największą wartość w zadanej przez użytkownika tablicy liczb rzeczywistych.

Zadanie 14.
Stusjąc rekursję dla zadanych przez użytkownika 2 liczb całkowitych a i b wyznacz ich najmniejszą wspólną wielokrotność (NWW).

WSKAZÓWKA: $NWW(a, b) = \frac{a \cdot b}{NWD(a,b)}$

Zadanie 15.
Napisz funkcję wyznaczającą miejsce zerowe dla zadanego przez użytkownika wielomianu (skorzystaj ze zdefiniowanej klasy `Wiel`), z zadaną dokładnością ε i w zadanym przedziale $[a, b]$, stosując metodę trisekcji (podziału przedziału na 3 części)

Zadanie 16.
Stosując pojedynczą pętlę, usuń rekursję w zadanich: 1., 2., 3., 5., 6., 7.

Zadanie 17.
Stosując metodę tablicową, usuń rekursję w zadanich: 4., 8., 9., 10., 11., 12.