Ekstrema globalne funkcji dwóch zmiennych - ćwiczenia

Przykład 1.

Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = x^2y - 18x - 9y + 3$ w zbiorze D, który jest ograniczony prostą $y = 6 - x$ i osiami układu współrzędnych.

Zbiór D jest trójkątem ograniczonym prostą $y = 6-x$ i osiami układu współrzędnych. Rozwiązanie tego zadania rozpoczniemy od znalezienia punktów stacjonarnych wewnątrz zbioru D. Mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 18, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 9.$$

Musimy rozwiązać układ równań (warunek konieczny istnienia ekstremum):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 0. \end{cases}$$

Jest on równowazny układowi

$$\begin{cases} -2xy - 18 & = & 0 \\ x^2 - 9 & = & 0. \end{cases}$$

Z drugiego równania otrzymujemy $x = 3$ lub $x = -3$. Wtedy dla $x = -3$ mamy $y = 3$ oraz dla $x = 3$ mamy $y = -3$, zatem otrzymujemy dwa punkty stacjonarne $A(3,-3)$ oraz $B(-3,3)$. Oba punkty nie leżą wewnątrz trójkąta D. Zatem funkcja może mieć ekstrema tylko na brzegu zbioru D.

Zbadamy teraz funkcję f na brzegu zbioru D, który składa się z trzech odcinków:

$$\text{I: } y = 0,\ x \in [0,6]; \quad \text{II: } x = 0,\ y \in [0,6]; \quad \text{III: } y = 6 - x,\ x \in [0,6]$$

Na odcinku I: $y = 0$, $x \in [0,6]$ a rozważana funkcja jest równa $g_1(x) := f(x,0) = -18x + 3$, $x \in [0,6]$. Jest to funkcja liniowa, więc wartość największą i najmniejszą osiąga na końcu przedziału i $g_1(0) = \underline{3}$ oraz $g_1(6) = \underline{-105}$.

Na odcinku II: $x = 0$, $y \in [0,6]$ a rozważana funkcja jest równa $g_2(x) := f(0,y) = -9y + 3$, $y \in [0,6]$. Jest to także funkcja liniowa, więc wartość największą i najmniejszą osiąga na końcu przedziału i $g_2(0) = \underline{3}$ oraz $g_2(6) = \underline{-51}$.

Na odcinku III: $y = 6 - x$, $x \in [0,6]$, natomiast rozważana funkcja jest równa

$$g_3(x) := f(x, 6-x) = x^2(6-x) - 18x - 9(6-x) + 3 = -x^3 + 6x^2 - 9x - 51,\ x \in [0,6].$$

Jest to funkcja jednej zmiennej, której ekstremum szukamy na przedziale $[0,6]$. Policzmy najpierw wartości funkcji na końcach przedziału. Mamy $g_3(0) = \underline{-51}$, $g_3(6) = \underline{-105}$. Następnie $g_3'(x) = -3x^2 + 12x - 9$. Z równania $g_3'(x) = 0$ otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 3$, a stąd $g_3(1) = \underline{-55}$ i $g_3(3) = \underline{-51}$.

Porównujemy wartości funkcji w otrzymanych punktach (tzn. porównujemy podkreślone liczby) i ustalamy wartości największe i najmniejsze funkcji f w zbiorze D: wartość największa funkcji wynosi 3 i jest osiągnięta w punkcie $(0,0)$, zaś wartość najmniejsza jest równa -105 i jest osiągnięta w punkcie $(6,0)$.

Przykład 2.

Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ w zbiorze D, który jest kołem $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Jak poprzednio rozwiązanie zadania rozpoczniemy od znalezienia punktów stacjonarnych wewnątrz zbioru D. Mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y.$$

Po rozwiązaniu układu równań:

$$\begin{cases} 2x - 2 &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases}$$

otrzymujemy jeden punkt stacjonarny $A(1,0)$, leży on wewnątrz tego koła. Liczymy wartość funkcji w tym punkcie. Mamy $f(1,0) = \underline{0}$.

Zbadamy teraz funkcję f na brzegu zbioru D, czyli na okręgu $x^2 + y^2 = 4$. Zauważmy najpierw, że $f(x,y) = f(-x,-y)$, zatem badanie wystarczy ograniczyć do górnego półokręgu $y = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2,2]$. Rozważana funkcja jest równa

$$g(x) := f(x, \sqrt{4-x^2}) = (x-1)^2 + (\sqrt{4-x^2})^2 = 5 - 2x, \ x \in [-2,2].$$

Jest to funkcja liniowa, więc wartość największą i najmniejszą osiąga na końcu przedziału. Stąd $g(-2) = \underline{9}$ oraz $g(2) = \underline{1}$.

Porównujemy wartości funkcji w otrzymanych punktach (tzn. porównujemy podkreślone liczby) i ustalamy wartości największe i najmniejsze funkcji f w zbiorze D: wartość największa funkcji wynosi 9 i jest osiągnięta w punkcie $(-2,0)$, zaś wartość najmniejsza jest równa 0 i jest osiągnięta w punkcie $(0,0)$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji f w zbiorze D:

   (a) $f(x,y) = x^2y - 8x - 4y$, D - trójkąt o wierzchołkach (0,0), (0,4), (4,0)

   (b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$, D - koło $x^2 + y^2 \leqslant 36$.

Odpowiedzi. 1.(a) wart.największa 0 w punkcie (0,0), wart.najmniejsza -32 w punkcie (4,0);
(b) wart.największa 36 w punktach (-6,0) i (6,0), wart.najmniejsza -72 w punktach (0,6) i (0,-6).