Metody numeryczne - 2. rok Inżynierii i Analizy Danych

Laboratoria 4. Rozwiązywanie układów równań nielinowych.

Funkcje MATLABA:

fsolve(f,app) - znajduje miejsce zerowe funkcji f.

fzero(f,app) - znajduje miejsce zerowe funkcji f. Miejsce zerowe jest wyznaczone dokładniej niż w funkcji `fsolve`, ale wymaga aby w okolicy miejsca zerowego funkcja f przyjmowała wartości różnych znaków

---

Zadanie 1.
W MATLABIE napisz funkcję przyjmującą jako argumenty końce przedziału w którym odszukiwane będzie metodą bisekcji miejsce zerowe, maksymalną liczbę kroków M metody, dokładność wyznaczania miejsca zerowego δ i dokładność wyznaczania wartości funkcji ε. Korzystając z niej wyznacz przybliżenie miejsca zerowego dla poniższych funkcji (osobno zapisanych w MATLABIE) i przedziałów oraz $M = 30$, $\delta = 0,00001$ i $\varepsilon = 0,00001$:

1)
$$f(x) = \frac{1}{x} - \mathrm{tg}x, \qquad [0,01; \frac{\pi}{2} - 0,01]$$

2)
$$f(x) = \frac{1}{x} - 2^x, \qquad [0,01; 1]$$

3)
$$f(x) = \frac{1}{2^x} + e^x + 2\cos x - 6, \qquad [1; 3]$$

4)
$$f(x) = x - \mathrm{tg}x, \qquad [1; 2]$$

5)
$$f(x) = x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320, \quad [5,5; 6,5]$$

6) Tak jak w poprzednim punkcie, ale zmieniając współczynnik przy x^7 z -36 na $-36,001$

Porównaj wyznaczone miejsca zerowe z wartościami wyznaczonymi za pomocą funkcji MATLABA.

Zadanie 2.
W MATLABIE napisz funkcje wyznaczające wartości poniższych funkcji i ich pochodnych w podanym w argumencie punkcie x. Napisz funkcję która dla zadanych w argumentach funkcji: liczby kroków M, dokładności wyznaczania miejsca zerowego δ - równego wartości bezwzględnej różnicy pomiędzy kolejnymi przybliżeniami miejsca zerowego, dokładności wyznaczania wartości funkcji ε, i punktu startowego $x0$, do funkcji z pierwszej części zadania zastosuje metodę Newtona. Zastosuj tę metodę dla $M = 10$, $\delta = 0,00001$ i $\varepsilon = 0,00001$, oraz poniższych funkcji wraz z punktami startowymi:

1)

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 7, \qquad x_0 = 5$$

2)

$$f(x) = \mathrm{tg} x, \qquad x_0 = 4,5 \text{ i } x_0 = 7,7$$

3)

$$f(x) = e^x - 1,5 - \mathrm{arctg} x, \qquad x_0 = -7$$

4)

$$f(x) = 2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1$$

x_0 dobierz tak aby wyznaczyć 2 pierwiastki bliskie $0,1$.

5)

$$f(x) = x^3 + 94x^2 - 389x + 294, \qquad x_0 = 2$$

wielomian ten ma pierwiastki: $1\ 3\ -98$.

Porównaj wyznaczone miejsca zerowe z wartościami wyznaczonymi za pomocą funkcji MATLABA.

Zadanie 3.
W MATLABIE napisz funkcje wyznaczające wartości poniższych funkcji i macierzy ich pochodnych w podanym w argumencie punkcie. Napisz funkcję która dla zadanych w argumentach funkcji: liczby kroków M, dokładności wyznaczania wartości funkcji ε, i punktu startowego, do funkcji z pierwszej części zadania zastosuje metodę Newtona dla układu równań. Zastosuj tę metodę dla $M = 10$, i $\varepsilon = 0,00001$, punktu startowego $x_0 = -1$ $y_0 = 4$ oraz poniższych układów równań:

1)

$$\begin{cases} 4y^2 + 4y + 52x = 19 \\ 169x^2 + 3y^2 + 111x - 10y = 10 \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} x + e^{-x} + y^3 = 0 \\ x^2 + 2xy - y^2 + \mathrm{tg} x = 0 \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} 1 + x^2 - y^2 + e^x \cos y = 0 \\ 2xy + e^x \sin y = 0 \end{cases}$$

Zadanie 4.
W MATLABIE napisz funkcje wyznaczające wartości poniższych funkcji. Następnie w MATLABIE napisz funkcję przyjmującą jako argumenty, maksymalną liczbę kroków M metody siecznych, dokładność wyznaczania miejsca zerowego δ i dokładność wyznaczania wartości funkcji ε i 2 punkty startowe. Zastosuj zaimplementowaną metodę dla $M = 20$, $\delta = \varepsilon = 0,00001$ i poniższych funkcji (oraz jeśli są, podanych punktów startowych):

1)

$$f(x) = \sin \frac{x}{2} - 1$$

2)

$$f(x) = e^x - \mathrm{tg} x$$

3)
$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 3x + 1$$

4)
$$f(x) = x^{20} - 1, \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 10$$

5)
$$f(x) = \mathrm{tg}x - 30x, \qquad x_0 = 1,\ x_1 = 1,57$$

6)
$$f(x) = x^2 - (1-x)^{10}, \qquad x_0 = 0,\ x_1 = 1$$

7)
$$f(x) = x^3 - 0,0001, \qquad x_0 = -0,75,\ x_1 = 0,5$$

8)
$$f(x) = x^{19} - 0,0001, \qquad x_0 = -0,75,\ x_1 = 0,5$$

9)
$$f(x) = x^5, \qquad x_0 = -1,\ x_1 = 10$$

10)
$$f(x) = x^9, \qquad x_0 = -1,\ x_1 = 10$$

11)
$$f(x) = xe^{-x^2}, \qquad x_0 = -1,\ x_1 = 4$$

Porównaj wyznaczone miejsca zerowe z wartościami wyznaczonymi za pomocą funkcji MATLABA.

Zadanie 5.
W MATLABIE napisz funkcje wyznaczające wartości funkcji z poprzedniego zadania. Następnie w MATLABIE napisz funkcję przyjmującą jako argumenty, maksymalną liczbę kroków M metody Steffensena, dokładność wyznaczania miejsca zerowego δ i dokładność wyznaczania wartości funkcji ε i punkt startowy. Zastosuj zaimplementowaną metodę dla $M = 20$, $\delta = \varepsilon = 0,00001$ i funkcji z poprzedniego zadania (oraz jeśli są, jednego z podanych punktów startowych).

Zadanie 6.
Przybliżenie pochodnej $f'(x)$, można uzyskać jeśli mamy dane wartości funkcji f w 3 punktach $(f(x+h), f(x), f(x+k))$ za pomocą poniższego wzoru:

$$f(x) \approx \frac{k^2 f(x+h) - h^2 f(x+k) + (h^2 - k^2) f(x)}{(k-h)kh}.$$

Napisz funkcję, znajdującą miejsce zerowe funkcji metodą Newtona z zastąpioną pochodną poprzez jej powyższe przybliżenie (wymagać ona będzie 3 punktów startowych). Zastosuj napisaną metodę do funkcji z zadania 4.

Zadanie 7.
W MATLABIE napisz funkcję która łączy metodę bisekcji z metodą Newtona w ten sposób, że wykonuje ona najpierw N kroków metody bisekcji, a następnie M kroków metody Newtona.

Zadanie 8.
W MATLABIE napisz funkcję, która dla zadanych w argumentach wielomianu, oraz punktu, wyznaczy wszystkie pochodne tego wielomianu w zadanym punkcie. Zastosuj tę funkcję do wielomianu

$$w(x) = 3x^5 - 7x^4 - 5x^3 + x^2 - 8x + 2$$

i punktu $x_0 = 4$

Zadanie 9.
W MATLABIE napisz funkcję, która dla podanego w argumencie wielomianu maksymalnej liczby kroków M metody, i dokładnośći wyznaczania wartości funkcji ε, łączy metodę Laguerre'a z deflacją wielomianu znalezionymi pierwiastkami. Zastosuj tę metodę do wyznaczenia pierwiastków wielomianu

$$w(x) = x^8 - 36x^7 + 546x^6 - 4536x^5 + 22449x^4 - 67284x^3 + 118124x^2 - 109584x + 40320$$

Powtórz działanie tej metody dla wielomianu $w(x)$ w którym współczynnik przy x^7 został zamieniony z -36 na -37.

Zadanie 10.
W MATLABIE napisz funkcję, która dla podanego w argumencie wielomianu maksymalnej liczby kroków M metody Bairstowa, oraz początkowych wartości u_0 i v_0, znajduje kwadratowy czynnik wielomianu $w(x)$. Zastosuj tę metodę do wyznaczenia czynnika kwadratowego $x^2 - ux - v$, wielomianu

$$w(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x - 2$$

i wartości startowych $u_0 = 3$ i $v_0 = -4$

Zadanie 11.
W MATLABIE napisz funkcję, która dla podanego w argumencie wielomianu maksymalnej liczby kroków M metody, i dokładnośći wyznaczania wartości funkcji ε, łączy metodę Newtona z deflacją wielomianu znalezionymi pierwiastkami.