3 Równanie różniczkowe liniowe rzędu n

Równanie postaci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = q(t), \quad a_n \neq 0 \tag{40}$$

nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym niejednorodnym rzędu n o stałych współczynnikach. Jeżeli $q(t) = 0$, to równanie postaci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_n \neq 0 \tag{41}$$

nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym jednorodnym rzędu n.

Rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego rzędu n wyraża się funkcją:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + ... + c_{n-1} y_{n-1}(t) + c_n y_n(t) + \varphi(t), \tag{42}$$

a zatem, rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego rzędu n składa się z sumy rozwiązań: rozwiązania ogólnego równania jednorodnego oraz rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego, które będziemy znajdować za pomocą metody przewidywań.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego zależy od pierwiastków równania charakterystycznego:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0. \tag{43}$$

Jeżeli r jest k-krotnym rzeczywistym pierwiastkiem równania charakterystycznego to odpowiadające mu rozwiązanie jest postaci:

$$y(t) = e^{rt}(c_1 + c_2 t + ... + c_k t^{k-1}). \tag{44}$$

Jeżeli $r = \alpha + i\beta$ jest k-krotnym zespolonym pierwiastkiem równania charakterystycznego (a także $\bar{r} = \alpha - i\beta$) to odpowiadające mu rozwiązanie jest postaci:

(45)

$$y(t) = e^{\alpha t}[(c_1 + c_2 t + ... + c_k t^{k-1}) \cos \beta t + (c_{k+1} + c_{k+2} t + ... + c_{2k} t^{k-1}) \sin \beta t].$$

Przykłady

Rozwiązać równania:

- $y^{IV} + 4y'' + 4y = 0$
- $y''' - y'' + 4y' - 4y = 6 \cos t$

- $y^{IV} - y'' = 6t - 4$

Dotychczas znajdując rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego za pomocą metody przewidywań, prawa strona (funkcja $q(t)$) była funkcją wielomianową, trygonometryczną, wykładniczą lub iloczynem wymienionych. W przypadku gdy $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$, to przewidujemy dwa rozwiązania szczególne równania niejednorodnego: $\varphi_1(t)$ oraz $\varphi_2(t)$, a całka szczególna tego równania jest ich sumą: $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$.

3.1 Elementy rachunku operatorowego

W tym rozdziale zajmiemy się rachunkiem operatorowym, czyli działaniami na pewnych odwzorowaniach, które wykorzystamy do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach bądź ich układów. Posłużymy się przekształceniem Laplace'a.
Definicja
Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[0, +\infty)$. Transformatę Laplace'a funkcji f definiujemy wzorem:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \tag{46}$$

gdzie t jest zmienną rzeczywistą, a $s = x + iy$.
Występująca we wzorze całka jest niewłaściwa, a zatem nie jest określona dla wszystkich funkcji. Jeżeli jednak całka (46) jest zbieżna, to funkcję $f(t)$ nazywamy oryginałem, a funkcję $F(s)$ - transformatą Laplace'a lub obrazem funkcji $f(t)$.
Przykład
Wyznaczyć obraz funkcji $f(t) = t$.
Transformaty niektórych funkcji zestawiono w tabeli: