- $y^{IV} - y'' = 6t - 4$

Dotychczas znajdując rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego za pomocą metody przewidywań, prawa strona (funkcja $q(t)$) była funkcją wielomianową, trygonometryczną, wykładniczą lub iloczynem wymienionych. W przypadku gdy $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$, to przewidujemy dwa rozwiązania szczególne równania niejednorodnego: $\varphi_1(t)$ oraz $\varphi_2(t)$, a całka szczególna tego równania jest ich sumą: $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$.

3.1 Elementy rachunku operatorowego

W tym rozdziale zajmiemy się rachunkiem operatorowym, czyli działaniami na pewnych odwzorowaniach, które wykorzystamy do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach bądź ich układów. Posłużymy się przekształceniem Laplace'a.

Definicja

Niech funkcja f będzie określona na przedziale $[0, +\infty)$. Transformatę Laplace'a funkcji f definiujemy wzorem:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \tag{46}$$

gdzie t jest zmienną rzeczywistą, a $s = x + iy$.

Występująca we wzorze całka jest niewłaściwa, a zatem nie jest określona dla wszystkich funkcji. Jeżeli jednak całka (46) jest zbieżna, to funkcję $f(t)$ nazywamy oryginałem, a funkcję $F(s)$ - transformatą Laplace'a lub obrazem funkcji $f(t)$.

Przykład

Wyznaczyć obraz funkcji $f(t) = t$.

Transformaty niektórych funkcji zestawiono w tabeli:

Oryginał $f(t)$	Transformata $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

Przekształcenie Laplace'a posiada szereg własności, które przedstawimy poniżej: *Liniowość:*

$$L[af(t)] = aL[f(t)],\ L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_1(t)]. \tag{47}$$

Przykład
Wyznaczyć transformatę funkcji: $f(t) = \cos^2 3t$, $\quad \cos^2 3t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6t$.
Zmiana skali:

$$L[f(at)] = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}). \tag{48}$$

Przykład
Wyznaczyć transformatę funkcji: $f(t) = \sin 4t$.
Różniczkowanie obrazu:

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s). \tag{49}$$

Przykład
Wyznaczyć transformatę funkcji: $f(t) = t^2 e^{-2t}$.
Przesunięcie argumentu obrazu:

$$L[e^{at} f(t)] = F(s-a). \tag{50}$$

Przykład
Wyznaczyć transformatę funkcji: $f(t) = te^t$.
Przesunięcie argumentu oryginału:

$$L[\mathbf{1}(t-\tau)f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s). \tag{51}$$

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t < 0 \\ 1, & \text{dla } t \geqslant 0 \end{cases}. \tag{52}$$

Przykład
Wyznaczyć transformatę funkcji: $\mathbf{1}(t-1)e^{t-1}$, $\mathbf{1}(t-3)t^2$., $\mathbf{1}(t-\pi)\cos t$.
Całkowanie oryginału:

$$L[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}. \tag{53}$$

Różniczkowanie oryginału:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - ... - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+). \tag{54}$$

Przykład
Wyznaczyć transformaty funkcji: $x'(t)$ oraz
$x''(t)$, wiedząc, że $x(0) = 1$,$x'(0) = -2$.

Ostatnia własność w połączeniu z liniowością transformaty Laplace'a pozwala rozwiązywać zagadnienia początkowe równań liniowych bądź ich układów.

Przykład
Rozwiązać zagadnienie początkowe: $y' - 2y = e^t - t,\ y(0) = 1/4$,
$y' + y = \sin t,\ y(0) = 0$.

W rozwiązywaniu równań różniczkowych za pomocą transformaty Laplace'a pomocne bywa pojęcie splotu dwóch funkcji. Niech funkcje $f(t)$ i $g(t)$ będą całkowalne na każdym przedziale $[0, T]$, $T > 0$. Splot funkcji $f(t)$ i $g(t)$ określa się wzorem:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{55}$$

Przykład
Oblicz splot funkcji $f(t) = t^2$ i $g(t) = 2t$.
Z pojęciem splotu związany jest wzór Borela.

Twierdzenie
Jeżeli funkcje $f(t)$ i $g(t)$ są oryginałami, to

$$L[f(t) * g(t)] = L[f(t)] \cdot L[g(t)] \quad \text{lub} \tag{56}$$
$$L^{-1}\{L[f(t)] \cdot L[g(t)]\} = f(t) * g(t) \tag{57}$$

Przykład
Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego: $y' + y = \sin t,\ y(0) = 0$.

Powyższy sposób postępowania można łatwo rozszerzyć na równania liniowe wyższych rzędów o stałych współczynnikach najczęściej uzupełnione o warunki początkowe. W takim przypadku, stosując transformację Laplace'a do lewej strony równania należy odpowiednio zastosować wzór (54).
Przykład
Rozwiąż zagadnienie Cauchy'ego: $y'' - 3y' = e^{-3t},\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$.

4 Układy równań różniczkowych zwyczajnych

Układem jednorodnym równań różniczkowych liniowych rzędu I o stałych współczynnikach nazywamy układ

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{cases} . \tag{58}$$

Układ taki często daje się rozwiązać za pomocą metody eliminacji, gdzie po zróżniczkowaniu jednego z równań i wstawieniu do pozostałych otrzymujemy równanie liniowe jednorodne o stałych współczynnikach rzędu wyższego. Działanie metody zilustruje przykład.
Przykład
Rozwiązać układ równań z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = -x - 3y \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases} . \tag{59}$$