2.1 Niezależność całki od drogi całkowania

Przykład.
Rozważmy całkę $\int_{K_i}(2x+2y)dx+(2x+3y^2)dy$, gdzie K_i jest odpowiednio:

(a) K_1 jest odcinkiem $[-1,1]$ łączącym punkty $A(-1,0)$ i $B(1,0)$;

(b) K_2 jet łukiem paraboli $y=1-x^2$, $x\in[-1,1]$;

(c) K_3 jest łukiem okręgu $x^2+y^2=1$ łączacym punkty $A(-1,0)$ i $B(1,0)$;

(a) Parametryzacja krzywej K_1 jest postaci $x(t)=t$, $y(t)=0$, $t\in[-1,1]$. Wtedy

$$\int_{K_1}(2x+2y)dx+(2x+3y^2)dy=\int_{-1}^{1}(2t\cdot 1+2t\cdot 0)dt=\int_{-1}^{1}2tdt=\left[t^2\right]_{-1}^{1}=1-1=0\ .$$

(b) Parametryzacja krzywej K_2 jest postaci $x(t)=t$, $y(t)=1-t^2$, $t\in[-1,1]$. Wtedy

$$\int_{K_2}(2x+2y)dx+(2x+3y^2)dy=\int_{-1}^{1}\left[2(t+1-t^2)\cdot 1+(2t+3(1-t^2)^2)(-2t)\right]dt=$$
$$\int_{-1}^{1}\left(-6t^5+12t^3-6t^2-4t+2\right)dt=\left[-t^6+3t^4-2t^3-2t^2+2t\right]_{-1}^{1}=0$$

(c) Parametryzacja okręgu $x^2+y^2=1$ jest postaci $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$, $t\in[0,\pi]$, przy czym początkiem krzywej jest punkt B, a końcem punkt A. Zatem jest to parametryzacja krzywej $-K_3$. Wykorzystamy własność

$$\int_{K_3}(2x+2y)dx+(2x+3y^2)dy=-\int_{-K_3}(2x+2y)dx+(2x+3y^2)dy$$

i stąd

$$\int_{K_3}(2x+2y)dx+(2x+3y^2)dy=-\int_{0}^{\pi}\left[2(\cos t+\sin t)(-\sin t)+(2\cos t+3\sin^2 t)(\cos t)\right]dt=$$
$$-\int_{0}^{\pi}\left(-2\sin t\cos t-2\sin^2 t+2\cos^2 t+3\sin^2 t\cos t\right)dt=-\int_{0}^{\pi}\left[-\sin 2t-2\cos 2t+3\sin^2 t\cos t\right]dt=$$
$$-\left[\tfrac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}+\left[\sin 2t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}3\sin^2 t\cos tdt=0$$

Czy to przypadek, że całka po każdej drodze całkowania daje ten sam wynik? $\rightarrow$ **nie !**

Twierdzenie 7 *Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciągłe w zbiorze D i mają ciągłe pochodne czątkowe rzędu pierwszego, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby w tym zbiorze całka krzywoliniowa*

$$\int_K P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

nie zależała od drogi całkowania jest, by wyrażenie

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

było różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x,y)$, tzn. by spełniony był warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ .$$

Z twierdzenia tego wynika następujący wniosek.

Wniosek 1 *Jeżeli w zbiorze D funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciągłe, mają ciągłe pochodne cząstkowe i spełniają warunek*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

a krzywa K łącząca punkty A i B oraz odcinek AB leżą w D, to całka krzywoliniowa po krzywej K jest równa całce krzywoliniowej po odcinku AB, tj.

$$\int_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ .$$

Wzór w poniższym wniosku zwany jest uogólnionym wzorem Newtona - Leibniza.

Wniosek 2 *Jeżeli w zbiorze D funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciagłe i mają ciągłe pochodne cząstkowe i spełniają warunek*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ,$$

a F jest różniczką zupełną wyrażenia $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, to

$$\int_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_K dF(x,y) = F(B) - F(A).$$

Możemy przeprowadzić analogiczne roważania dla całki krzywoliniowej wzdłuż krzywej $K \subset R^3$.

Twierdzenie 8 *Jeżeli funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ są ciągłe w zbiorze D i mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby w tym zbiorze całka krzywoliniowa*

$$\int_K P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

nie zależała od drogi całkowania jest, by wyrażenie

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y,z)dz$$

była różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x,y,z)$, tzn. by spełniony był warunek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \ .$$

Przykład. Czy wyrażenia

(a) $(2xy + y^3 + 2)dx + (x^2 + 3xy^2)dy$;

(b) $(2xyz^2 + 2y^2z)dx + (x^2z^2 + 4xyz)dy + (2x^2yz + 2xy^2)dz$

są różniczkami zupełnymi pewnych funkcji? Jeżeli tak to znajdź te funkcje.

(a) Mamy $P(x,y) = 2xy + y^3 + 2$, $Q(x,y) = x^2 + 3xy^2$. Stąd

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 3y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + 3y^2,$$

czyli

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Zatem istnieje funkcja $F(x,y)$ taka, że spełnione sa warunki

$$(1)\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + y^3 + 2 \qquad (2)\ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 3xy^2.$$

Z równania pierwszego otrzymujemy:

$$F(x,y)=\int(2xy+y^3+2)dx=x^2y+xy^3+2x+\varphi(y).$$

Różniczkując powyższą funcją względem zmiennej y mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+3xy^2+\varphi'(y).$$

Biorąc pod uwagę powyższą równość i równanie (2) mamy

$$x^2+3y^2x+\varphi'(y)=x^2+3xy^2.$$

Stąd $\varphi'(y)=0$, co jest równoważne $\varphi(y)=c$. Tak więc funkcja $F(x,y)$ jest postaci $F(x,y)=x^2y+y^3x+2x+c$.

(b) Mamy

$$P(x,y,z)=2xyz^2+2y^2z \quad , \quad Q(x,y,z)=x^2z^2+4xyz \quad , \quad R(x,y,z)=2x^2yz+2xy^2\ .$$

Stąd

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2xz^2+4yz \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial z}=4xyz+2y^2 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2xz^2+4yz$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}=2x^2z+4xy \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial x}=4xyz+2y^2 \quad , \quad \frac{\partial R}{\partial y}=2x^2z+4xy\ .$$

Ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\ ,$$

więc istnieje funkcja $F(x,y,z)$ taka, że

$$(1)\ \frac{\partial F}{\partial x}=2xyz^2+2y^2z,\quad (2)\ \frac{\partial F}{\partial y}=x^2z^2+4xyz,\quad (3)\ \frac{\partial F}{\partial z}=2x^2yz+2xy^2.$$

Z (1) otrzymujemy

$$(4)\quad F(x,y,z)=\int(2xyz^2+2y^2z)dx=x^2yz^2+2xy^2z+\varphi(y,z).$$

Rózniczkując funkcję F z równości (4) względem zmiennej y mamy

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2z^2+4xyz+\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Korzystając z (2) oraz z pochodnej cząstkowej funkcji F po zmiennej y mamy

$$x^2z^2+4xyz+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2z^2+4xyz\ ,$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Oznacza to, że funkcja $\varphi(y,z)$ jest względem zmiennej y funkcją stałą, czyli zależną tylko od zmiennej z. Zatem $\varphi(y,z)=a(z)$. Ponadto różniczkując funkcję $F(x,y,z)$ wyznaczoną w (4), względem zmiennej z mamy i podstawiając $a(z)$ za $\varphi(y,z)$ mamy

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2x^2yz+2xy^2+a'(z).$$

Porównując z warunkiem (3) otrzymujemy $a'(z) = 0$, co oznacza, że $a(z) = c$. Zatem

$$F(x, y, z) = x^2yz^2 + 2xy^2z + c \ .$$

Przykład.
Obliczyć całkę

$$I = \int_K (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy,$$

po dowolnej krzywej K łączącej punkty $A(0,0)$ i $B(2,2)$.

Zadanie to rozwiążemy na dwa sposoby.
Sposób I.
Zauważmy, że

$$P(x, y) = 2xy - 5y^3 \quad , \quad Q(x, y) = x^2 - 15xy^2 + 6y.$$

Stąd

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 15y^2 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 15y^2.$$

Oznacza to, że funkcja podcałkowa jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x, y)$. Mamy

$$(1) \ \frac{\partial F}{\partial x} = 2xy - 5y^3 \quad , \quad (2) \ \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 15xy^2 + 6y.$$

Z warunku (1)

$$F(x, y) = \int 2xy - 5y^3 dx = x^2y - 5xy^3 + \varphi(y).$$

Różniczkując wyznaczoną funkcję $F(x, y)$ po zmiennej y i porównując z warunkiem (2) otrzymujemy

$$x^2 - 15xy^2 + \varphi'(y) = x^2 - 15xy^2 + 6y,$$

co daje $\varphi(y) = 3y^2 + c$. Zatem szukana funkcja $F(x, y)$ ma postać

$$F(x, y) = x^2y - 5xy^3 + 3y^2 + c \ .$$

Korzystając z uogólnionego wzoru Newtona-Leibniza mamy

$$I = \int_K (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy = F(2, 2) - F(0, 0) = 8 - 80 + 12 + c - c = -60.$$

Sposób II. Wykazaliśmy w poprzednim rozwiązaniu, że funkcja podcałkowa jest różniczką zupełną pewnej funkcji $F(x, y)$, co oznacza, że szukana całka nie zależy od drogi całkowania. Korzystając z Wniosku 1 wynikającego z Twierdzenia 7, możemy zatem daną całkę obliczyć po odcinku łączącym punkty $A(0,0)$ i $B(2,2)$. Odcinek AB ma parametryzację

$$x(t) = t, \quad y(y) = t, \quad t \in [0, 2].$$

Zatem

$$I = \int_K (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy = \int_0^2 (-20t^3 + 3t^2 + 6t)dt = \left[-5t^4 + t^3 + 3t^2\right]_0^2 = -60.$$

2.2 Twierdzenie Greena

Mówimy, że krzywa K jest krzywą zamkniętą, jeśli początek tej krzwej pokrywa się z jej końcem. Każda zamknięta krzywa gładka K wyznacza na płaszczyźnie dwa zbiory. Zbiór ograniczony zwany **wnętrzem krzywej** oraz zbiór nieograniczony zwany **zewnętrzem krzywej**. Całkę krzywoliniową po zamkniętej krzywej K oznaczamy często symbolem

$$\oint_K (P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Zamkniętej krzywej K możemy nadać orientację dodatnią względem wnętrza, gdy przy obiegu krzywej zbiór jest zawsze po lewej stronie, lub ujemną. Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9 *Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciągłe i mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w pewnym zbiorze normalnym D, przy czym brzeg K tego zbioru jest krzywą skierowaną dodatnio względem wnętrza, to*

$$\oint_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Przykład. Obliczyć całkę $I = \oint_K (2xy - 5y)dx + (x^2 + y)dy$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = 4$ zorientowanym dodatnio.

Mamy

$$P(x,y) = 2xy - 5y \quad , \quad Q(x,y) = x^2 + y \ ,$$

skąd

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 5 \ .$$

Z Twierdzenia Greena mamy

$$I = \oint_K (2xy - 5y)dx + (x^2 + y)dy = \iint_D 5dxdy = 5|D| \ ,$$

gdzie $|D|$ oznacza miarę zbioru D, którego brzegiem jest krzywa K, czyli pole powierzchni koła D. Ze znanego wzoru na pole koła mamy

$$I = \oint_K (2xy - 5y)dx + (x^2 + y)dy = 5|D| = 20\pi \ .$$

Przykład. Obliczyć całkę

$$I = \oint_K \tfrac{1}{x}\mathrm{arctg}\tfrac{y}{x}dx + \tfrac{2}{y}\mathrm{arctg}\tfrac{x}{y}dy,$$

gdzie K jest krzywą zamkniętą, zorientowaną dodatnio, będącą sumą łuków okręgów $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$ i odcinków prostych $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

Mamy

$$P(x,y) = \tfrac{1}{x}\mathrm{arctg}\tfrac{y}{x} \quad , \quad Q(x,y) = \tfrac{2}{y}\mathrm{arctg}\tfrac{x}{y}.$$

Stąd

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{y} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

oraz

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Ponieważ założenia Twierdzenia Greena są spełnione zatem

$$I = \oint\limits_K \frac{1}{x}\text{arctg}\frac{y}{x}dx + \frac{2}{y}\text{arctg}\frac{x}{y}dy = \iint\limits_D \left(\frac{2}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\right) dxdy = \iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy.$$

Zbiór D ograniczony przez krzywą K jest wycinkiem pierścienia pomiędzy prostymi, które są nachylone do osi Ox pod kątami $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{\pi}{3}$, zatem przy obliczaniu całki skorzystamy ze współrzędnych biegunowych. Mamy

$$I = \iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2}dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{r^2} r d\varphi\right) dr = \int_1^2 \frac{1}{r} \left[\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dr = \frac{\pi}{12} \left[\ln r\right]_1^2 = \frac{\pi}{12} \ln 2.$$