Całka powierzchniowa niezorientowana - ćwiczenia

Zadanie 1. Korzystając z Twierdzenia 1 z wykładu obliczyć podane całki.

(a) $\iint\limits_S (x+y+z)\, ds$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $z = -2x - 2y$ leżącą nad prostokątem D, gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0,\ -2 \leqslant y \leqslant 0\}$;

(b) $\iint\limits_S (x+y+z)\, ds$, gdzie S jest częścią płaszczyzny $x+y+z = 1$ leżącą w pierwszym oktancie układu współrzędnych;

(c) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\ ds$, gdzie S jest powierzchnią boczną stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ograniczoną płaszczyzną $z = 3$;

(d) $\iint\limits_S z\ ds$, gdzie $S:\ z = \sqrt{2xy},\ x^2+y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$;

(e) $\iint\limits_S \sqrt{1+y^2}\ ds$, gdzie $S:\ z = x\sqrt{3} + y^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 4$.

Rozwiązanie przykładu (b):

Z założeń zadania płaszczyzna $x + y + z = 1$ jest określona dla $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$ i $z \geqslant 0$. Rzutem płata S na płaszczyznę xOy jest zbiór D, który możemy opisać jako zbiór punktów, spełniający warunki: $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant -x + 1$ (zbiór D traktujemy tutaj jako zbiór normalny względem osi Ox). Ponadto płat S jest dany wzorem $z = f(x, y) = 1 - x - y$, zaś funkcja $F(x, y, z) = x + y + z$. Zatem

$$f'_x = -1 \text{ i } f'_y = -1 \text{ oraz } F(x, y, z) = F(x, y, f(x, y)) = x + y + (1 - x - y) = 1.$$

Korzystając ze wzoru z Twierdzenia 1 mamy

$$\iint\limits_S (x+y+z)\ ds \ = \ \iint\limits_D 1 \cdot \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\ dxdy = \sqrt{3} \iint\limits_D 1\ dxdy = I$$

Można zauważyć, że zbiór D jest trójkątem ograniczonym prostą $y = -x+1$ i osiami układu współrzędnych, zatem ostatnia całka definiuje pole tego trójkąta, stąd

$$I \ = \ \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zadanie 2. Korzystając z Wniosku 1 z wykładu obliczyć pola podanych płatów.

(a) $S : z = 2xy, \quad$ gdzie $\quad x^2 + y^2 \leqslant 1$;

(b) S jest częścią płaszczyzny $2x + 3y + z - 6 = 0$ wyciętą przez walec $x^2 + y^2 = 4$;

(c) $S : z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad$ gdzie $\quad x^2 + y^2 \leqslant 4$;

(d) S jest częścią paraboloidy $z = x^2 + y^2$ odciętą przez płaszczyznę $z = 9$.

Rozwiązanie przykładu (d):

Płat S dany jest równaniem $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Z przecięcia paraboloidy i płaszczyzny otrzymujemy okrąg $x^2 + y^2 = 9$, zatem rzutem części płata S na płaszczyznę xOy jest koło o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $r = 3$. Ponadto

$$f'_x = 2x \quad \text{i} \quad f'_y = 2y.$$

Zatem, z wniosku 1 otrzymujemy

$$|S| = \iint_S 1\ ds = \iint_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\ dxdy = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\ dxdy = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\ dxdy = I.$$

Korzystając ze współrzędnych biegunowych $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, gdzie $r \in [0,3]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, mamy

$$x^2+y^2 \;=\; (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2\left[(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2\right] = r^2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left[\int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2}\cdot r\ d\varphi\right] dr = \int_0^3 \left[\sqrt{1+4r^2}\cdot r \int_0^{2\pi}\ d\varphi\right] dr \\ &= \int_0^3 \left[\sqrt{1+4r^2}\cdot r\cdot 2\pi\right] dr = 2\pi\int_0^3 \left[\sqrt{1+4r^2}\cdot r\right] dr. \end{aligned}$$

Podstawiając $1+4r^2 = t$ $(8r\ dr =\ dt)$ oraz zmieniając granice całkowania, otrzymujemy

$$I \;=\; 2\pi\int_1^{37}\left[\sqrt{t}\cdot\frac{1}{8}\right] dt = \frac{\pi}{4}\int_1^{37} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{37} = \frac{\pi}{6}\left(37^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

Zadanie 3.

(a) Oblicz całkę powierzchniową $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, gdzie S jest płatem powierzchni śrubowej: $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = v \end{cases}$

gdzie $0 \leqslant u \leqslant 1$ oraz $0 \leqslant v \leqslant 1$.

(b) Obliczyć pole płata S wyciętego z paraboloidy hiperbolicznej $x^2 - y^2 = 2z$ walcem $x^2+y^2 = 2$. Płat ten ma równanie parametryczne $\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \\ z = 2uv \end{cases}$ dla $y^2+v^2 \leqslant 1$.

Rozwiązanie przykładu (a):

W tym przypadku musimy skorzystać z Twierdzenia 2 z wykładu. Mamy:

$x'_u = \cos v$, $y'_u = \sin v$, $z'_u = 0$,
$x'_v = -u\sin v$, $y'_v = u\cos v$, $z'_v = 1$,

$$A = \begin{vmatrix} \sin v & u\sin v \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin v \quad , \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -\cos v \quad , \quad C = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\ .$$

Ponadto

$$F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = \sqrt{(u\cos v)^2 + (u\sin v)^2} = u$$

oraz

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{(\sin v)^2 + (-\cos v)^2 + u^2} = \sqrt{1+u^2}.$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\, ds &= \iint\limits_D u\sqrt{1+u^2}\, dudv = \int_0^1 \left[\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\, dv\right] du = \int_0^1 \left[u\sqrt{1+u^2}\cdot [v]_0^1\right] du \\
&= \int_0^1 \left[u\sqrt{1+u^2}\right] du = I.
\end{aligned}
$$

Podstawiając $1+u^2 = t$ $(2u\ du = \ dt)$ oraz zmieniając granice całkowania, otrzymujemy

$$
I = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{t}\ dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).
$$