Szeregi funkcyjne - ćwiczenia

Zadanie 1. Zbadać zbieżność podanych szeregów potęgowych.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n+2} x^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{10^n} x^n$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} x^n$

Przykład: Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} x^n$.

Mamy

$$a_n = \frac{3^n n!}{n^n}, \qquad \text{wtedy} \qquad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Skorzystamy z kryterium d'Alemberta. Wyrazy ciągu a_n są dodatnie. Obliczmy

$$\begin{aligned} g = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \tfrac{n^n}{3^n n!} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{3^n \cdot 3 \cdot n! \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot 3^n \cdot n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} 3 \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \\ &= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 3 \cdot \frac{1}{e} = \frac{3}{e} = g. \end{aligned}$$

Zatem $R = \frac{1}{g} = \frac{e}{3}$, stąd szereg jest zbieżny w przedziale $-\frac{e}{3} < x < \frac{e}{3}$.

Rozwiązanie przykładu (d): $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{10^n} x^n$

Przyjmijmy, że

$$a_n = \frac{\sqrt{n!}}{10^n}, \qquad \text{wtedy} \qquad a_{n+1} = \frac{\sqrt{(n+1)!}}{10^{n+1}}.$$

Skorzystamy z kryterium d'Alemberta. Wyrazy ciągu a_n są dodatnie. Obliczmy

$$g = \lim_{n\to\infty} \tfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)!}}{10^{n+1}} \cdot \tfrac{10^n}{\sqrt{n!}} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{\sqrt{n+1}}{10} = \infty.$$

Zatem $R = 0$. Stąd badany szereg jest zbieżny tylko dla $x = 0$.

Zadanie 2. Rozwinąć w szereg Maclaurina podane funkcje

(a) $f(x) = e^x \cdot \sin x$

(b) $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

(c) $f(x) = \sin x$

(d) $f(x) = \cos x$

(e) $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(f) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

Rozwiązanie przykładu (a):

Mamy $f(x) = e^x \cdot \sin x$. Licząc pochodne będziemy korzystać ze wzoru:

$$sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$f'(x) = e^x\sin x + e^x\cos x = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,
$f''(x) = \sqrt{2}e^x\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}e^x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^x\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{4}\right)$,
$f'''(x) = 2e^x\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2e^x\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2e^x\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^3e^x\sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{4}\right)$

i ogólnie

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x\sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{4}\right).$$

Zatem

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (\sqrt{2})^n e^0\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n = \frac{(\sqrt{2})^n e^{\theta x}\sin\left(\theta x + n\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{n!}x^n \text{ dla } \theta \in (0,1).$$

Mamy

$$|R_n| = \left|\frac{(\sqrt{2})^n e^{\theta x}\sin\left(\theta x + n\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{n!}x^n\right| < \frac{(\sqrt{2})^n e^{|x|}}{n!}|x|^n.$$

Dla ustalonego x przyjmijmy $a_n = \frac{(\sqrt{2})^n e^{|x|}}{n!}|x|^n$ i rozważmy szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Korzystając z kryterium d'Alemberta mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\sqrt{2})^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\cdot\frac{n!}{(\sqrt{2})^n e^{|x|}|x|^n} = \frac{\sqrt{2}}{n+1}|x|.$$

Stąd

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n+1}|x| = 0 < 1.$$

Zatem szereg jest zbieżny. Czyli jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ponieważ $R_n < a_n$, zatem $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ dla każdego x. Stąd

$$e^x\cdot\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)x^n$$

Rozwiązanie przykładu (e):

Mamy $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Zapiszmy daną funkcję w postaci $f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$. Z wykładu wiemy, że

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\dots\ ,\ x \in (-1,1).$$

Kładąc $-x$ zamisat x w powyższym wzorze otrzymujemy

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}x^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\dots\ ,\ x \in (-1,1).$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \ldots\right) - \left(-x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \ldots\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \ldots + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 \ldots\right] \\
&= x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2n-1} x^{2n-1}.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie przykładu (f):

Rozważmy funkcję $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$. Licząc pochodne otrzymujemy

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\
f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
f'''(x) &= \frac{8x-2}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

Dla $x = 0$ mamy

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(0) &= 1 \\
f''(0) &= 0 \\
f'''(0) &= -2
\end{aligned}$$

zatem

$$f(x) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$